





## II. Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace orienté :

### 01. Définition géométrique du produit vectoriel :

#### a. Définition :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  deux vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) orienté .

Le produit vectoriel de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (dans cet ordre) est le vecteur  $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ , on note  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  qui vérifie :

1. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires alors  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .

2. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  se sont pas colinéaires alors :

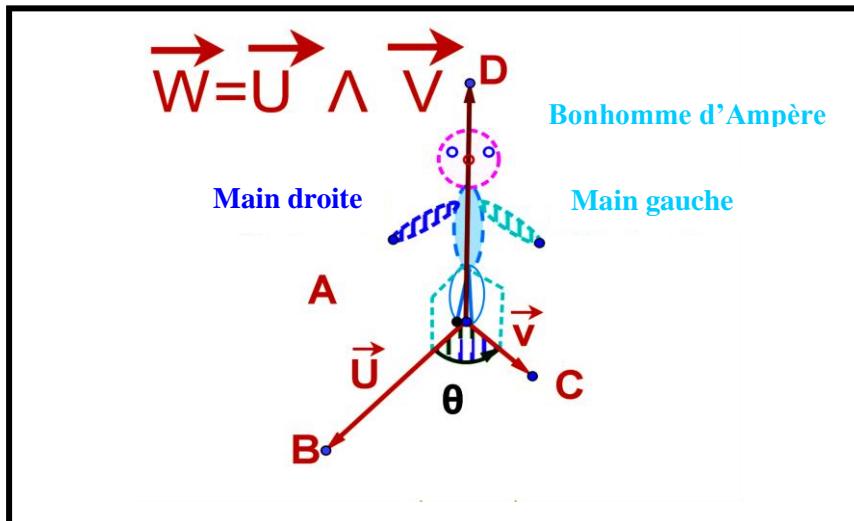
- $\vec{w}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (c.à.d.  $\vec{w} \perp \vec{u}$  et  $\vec{w} \perp \vec{v}$ )

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base directe ou encore  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  est une base directe ou encore  $(AB, AC, AD)$  est un trièdre direct .

- La norme de  $\vec{w}$  est  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin \theta$ ,  $\theta$  est la mesure de l'angle géométrique  $BAC$ .

#### b. Exemple :

Exemple 1 :



Exemple 2 :

On pose :  $\|\vec{u}\| = 2$  et  $\|\vec{v}\| = 5$  et  $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$  calculer  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

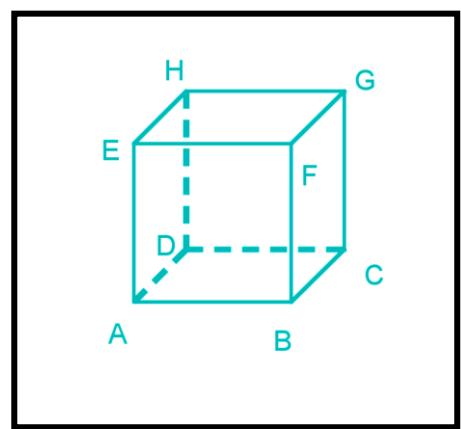
On a :

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\| &= \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin \theta \\ &= 2 \times 5 \times \sin \frac{\pi}{6} \\ &= 5\end{aligned}$$

Conclusion :  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 5$

Exemple 3 :

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre , tel que  $AB = 1$ .





1. On détermine :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HG}$  et  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ .

2. On détermine :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HG}$  et  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ .

**Correction :**

1. On détermine :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HG}$  et  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$

- On a  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HG} = \vec{0}$  car  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{HG}$  sont colinéaires.

- $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = 1 \times 1 \times \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE}$ .

2. On détermine :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HG}$  et  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$

- On a  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HG} = \vec{0}$  car  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{HG}$  sont colinéaires.

- $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = 2 \times 2 \times \overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AE}$ .

c. Conséquences :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  deux vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) orienté.

1.  $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$  et  $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$  et  $\vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ .

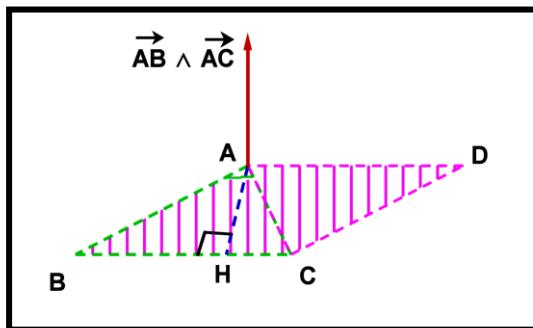
2. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et orthogonaux ( $\vec{u} \perp \vec{v}$ ) le triplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base orthogonale directe.

3. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et orthogonaux ( $\vec{u} \perp \vec{v}$ ) et  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$  le triplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base orthonormée directe.

4. Le plan passant par le point A a pour vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (c.à.d.  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ ) alors le vecteur  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  est normal à ce plan d'où :  $P(A, \vec{u}, \vec{v}) = P(A, \vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v})$ .

5.  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires})$ .

## 02. Interprétation de la norme du produit vectoriel de deux vecteurs :



a. Propriété :

- La surface du triangle ABC est  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ .

- La surface du parallélogramme ABCD est  $S_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ .

## 03. L'antisymétrie et la linéarité du produit vectoriel :

a. Propriété :

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace ( $E$ ) orienté et  $\alpha \in \mathbb{R}$  on a :

1. L'antisymétrie du produit vectoriel :  $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$ .

2. Bilinéarité du produit vectoriel :  $\begin{cases} \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) \end{cases}$

**III.** Les coordonnées  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  de l'espace rapporté à une base orthonormée directe :

a. Propriété :

l'espace rapporté à une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soient  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$  deux vecteurs de l'espace on a :

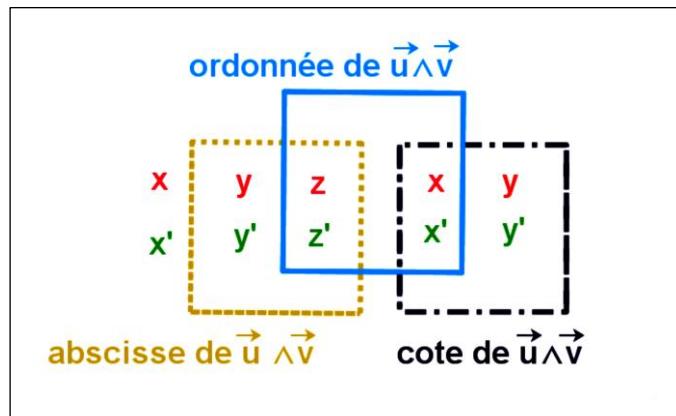
$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \Delta_x \vec{i} - \Delta_y \vec{j} + \Delta_z \vec{k} \end{aligned}$$

b. Exemple :

- On a :  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$  ;  $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$  ;  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ .

- $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

c. Technique :



#### **IV. Distance d'un point à une droite de l'espace :**

##### **a. Propriété :**

$D(A, \vec{u})$  est une droite passant par le point A et est dirigé par un vecteur directeur  $\vec{u}$  de l'espace .

M est un point de l'espace ; la distance du point A à la droite  $D(A, \vec{u})$  est :

$$d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

##### **b. Exemple :**

Calculons la distance du point M(1,3,0) à la droite (D) définie par :

1. la présentation paramétrique suivante (D):  $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$ .

2. Système d'équations cartésiennes suivante (D):  $\frac{x+1}{3} = y = \frac{1-z}{2}$ .

**Correction :**

1. Calculons la distance  $d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ .

On a : la droite  $D(A(0,3,-1), \vec{u}(2,-1,1))$  donc

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{6} \text{ et } \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 3-3 \\ 0+1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \text{ donc } \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{3}$$

$$\text{D'où : } d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Calculons la distance  $d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ .

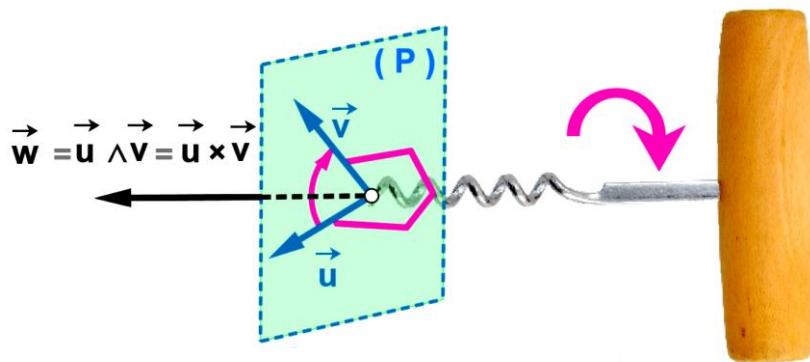
On a : la droite  $D(A(-1,0,1), \vec{u}(3,1,-2))$  donc

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{6} \text{ et } \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 3-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -5\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k} \text{ donc } \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{75}$$

$$\text{D'où : } d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{1050}}{14}.$$

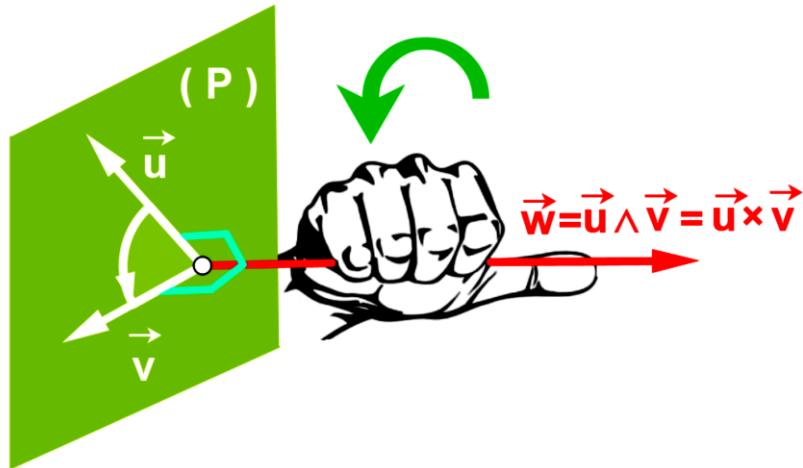


Produit vectoriel on utilise :  
règle << de tire bouchon >>



règle de "tire bouchon "

"règle de la main droite "



règle de " la main droite "

Bonhomme d'Ampère

