

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nul de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) ; A et B et C trois points de ( $\mathcal{E}$ ) tel que :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  ; H est la projection de C sur la droite (AB) .

Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  on a  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

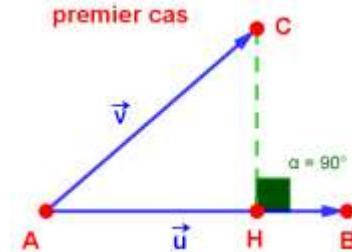
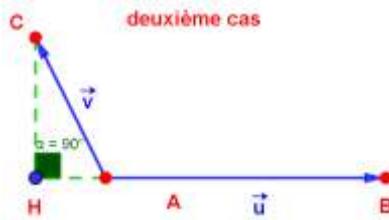
2<sup>ème</sup> cas le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

1<sup>er</sup> cas le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

premier cas



## DEFINITION

### Remarque

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$  est le carré scalaire de  $\vec{u}$  est toujours positif .
- $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$  est la norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  on note :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$  .
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  .
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$  ou  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

### Propriétés

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) ;  $\alpha \in \mathbb{R}$  on a :

Linéarité du produit scalaire : 
$$\begin{cases} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \text{ et } (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$$

### Base et repère orthonormé

- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) équivaut à  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  ne sont pas coplanaires  $(\det(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \neq 0)$
- Prenons un point O de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) le quadruplé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est appelé repère de ( $\mathcal{E}$ )
- Si  $\vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$  et  $\|\vec{j}\| = \|\vec{i}\| = \|\vec{k}\| = 1$  alors :
  - ❖ la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée de l'espace .
  - ❖ le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthonormé de l'espace .

Le reste de ce chapitre ; on considère l'espace ( $\mathcal{E}$ ) est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  .

On prend  $\vec{u}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{v}(x', y', z') = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$  et  $M(x, y, z)$  et  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $B(x_B, y_B, z_B)$  et  $C(x_C, y_C, z_C)$

### Expression analytique de $\vec{u} \cdot \vec{v}$

- Le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$  .
- La norme du vecteur  $\vec{u}$  est :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  .
- La distance AB est :  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$  .



Conséquence	Ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que : $\vec{AM} \cdot \vec{u} = k$ avec $\vec{u}(a, b, c)$ ; $(\vec{u} \neq \vec{0})$ c.à.d. $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est un plan a pour équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$	
Le plan $P(A, \vec{n})$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tout vecteur <math>\vec{n}</math> non nul sa direction est perpendiculaire au plan <math>(P)</math> s'appelle vecteur normal au plan <math>(P)</math>.</li> <li><math>\vec{n}</math> est normale au plan <math>P(A, \vec{u}, \vec{v})</math> alors <math>\vec{n} \perp \vec{u}</math> et <math>\vec{n} \perp \vec{v}</math>.</li> <li>Si <math>\vec{n}</math> est normale au plan <math>(P)</math> et passe par A le plan <math>(P)</math> est noté par <math>P(A, \vec{n})</math></li> <li>L'ensemble des points <math>M(x, y, z)</math> de l'espace <math>(\mathcal{E})</math> qui vérifie <math>ax + by + cz + d = 0</math> avec <math>(a, b, c) \neq (0, 0, 0)</math> est le plan tel que un vecteur normal est <math>\vec{n}(a, b, c)</math>.</li> <li>Ensemble des points <math>M(x, y, z)</math> de l'espace <math>(\mathcal{E})</math> qui vérifie <math>\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0</math> et <math>\vec{n} \neq \vec{0}</math> est le plan qui passe par A et le vecteur <math>\vec{n}</math> est un vecteur normal à ce plan.</li> <li>Donc tout plan <math>P(A, \vec{n}(a, b, c))</math> a pour équation cartésienne de la forme <math>ax + by + cz + d = 0</math> la réciproque est vraie avec <math>(a, b, c) \neq (0, 0, 0)</math>.</li> </ul>	
Distance d'un point à un plan	$AH = d(A, (P)) = \frac{ ax_A + by_A + cz_A + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $(P) : ax + by + cz + d = 0$	
Parallélisme et orthogonalité de deux plans	$(P_1) : ax + by + cz + d = 0$ et $(P_2) : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ $(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow (\vec{n} \text{ et } \vec{n}' \text{ sont colinéaires})$ $(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ (non nuls)}$ $(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \text{ (} \vec{n} \text{ et } \vec{n}' \text{)}$	
Parallélisme et orthogonalité d'une droite et un plan	$P(B, \vec{n})$ et $D(A, \vec{u})$ et $(P) : ax + by + cz + d = 0$ $(D) \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ $(D) \perp (P) \Leftrightarrow (\vec{n} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires})$	
Etude analytique d'une sphère		
Définition	$\Omega$ est un point donné de l'espace $(\mathcal{E})$ et $R > 0$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que $\Omega M = R$ s'appelle le sphère de centre $\Omega$ et de rayon $R$ on note $(S)$ ou $S(\Omega, R)$ . Equation cartésienne de $(S) = S(\Omega(a, b, c), r)$ est : $M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ ou bien : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ avec $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$	

$\Omega$  est le milieu de  $[AB]$ ;  $[AB]$  est un diamètre du sphère

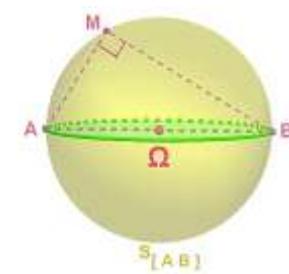
$(S)$  donc A et B appartiennent à  $(S)$

On dit la sphère de diamètre  $[AB]$  on note  $(S)$  ou  $S_{[AB]}$ .

Equation cartésienne de  $S_{[AB]}$  est :

$M(x, y, z) \in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  ou bien

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$



Ensemble des  $M(x, y, z)$

L'ensemble des  $M(x, y, z)$  de l'espace  $(\mathcal{E})$  tel que  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$  avec a et b et c et d de  $\mathbb{R}$  on pose  $A = a^2 + b^2 + c^2 - 4d$  est :

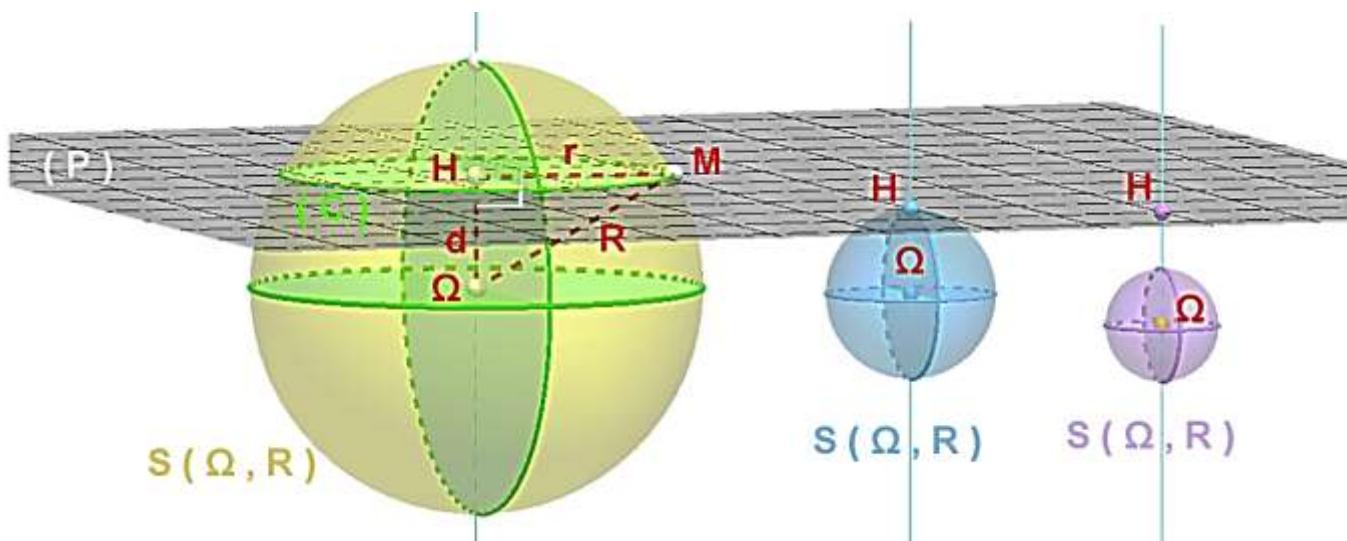
- $(E) = \emptyset$  si  $A < 0$ .
- $(E) = \left\{ \Omega \left( -\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right) \right\}$  si  $A = 0$ .
- Le Sphère  $(E) = S \left( \Omega \left( -\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right), R = \frac{\sqrt{A}}{2} \right)$  si  $A > 0$ .

### Intersection d'un plan $(P)$ et une sphère $(S)$

3<sup>ème</sup> cas

2<sup>ème</sup> cas

1<sup>er</sup> cas



3<sup>ème</sup> CAS :  $d = \Omega H < R$  on a  $(P) \cap (S) = (C)$

$(P)$  coupe  $(S)$  suivant le cercle de centre H et de rayon  $R_C = \sqrt{R^2 - d^2}$   $R_C = r$  et  $R_S = R$

2<sup>ème</sup> CAS :  $d = \Omega H = R$  on a  $(P) \cap (S) = \{H\}$   $(P)$  et  $(S)$

sont tangents en H avec  $(H\Omega) \perp (P)$

1<sup>er</sup> CAS :

$d = \Omega H > R$  on a  $(P) \cap (S) = \emptyset$   $(P)$  et  $(S)$  son disjoints

Remarques :

- H est la projection de  $\Omega$  sur  $(P)$  et  $d = \Omega H = d(\Omega, (P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
- on détermine H par l'intersection du plan  $(P)$  et la droite  $(D)$  perpendiculaire au plan passant par  $\Omega$

- Vecteur normal  $\vec{n}$  au plan  $(P)$  est un vecteur directeur de la droite  $(D)$

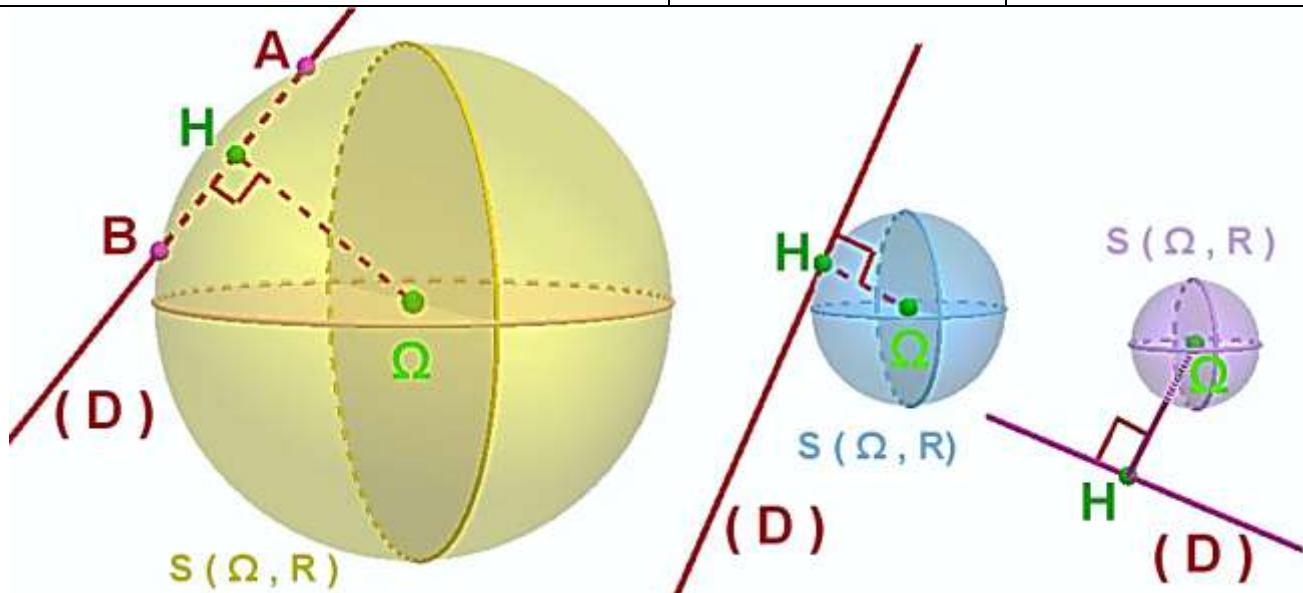
Théorème : par un point A quelconque d'une sphère  $(S)$  il existe un et un seul plan  $(Q)$  tangent à la sphère  $(S)$  au point A. L'équation de  $(Q)$  est :  $M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$

Intersection d'une droite  $(D)$  et une sphère  $(S)$

3<sup>ème</sup> CAS :

2<sup>ème</sup> CAS

1<sup>er</sup> CAS :



3<sup>ème</sup> CAS :  $(D) \cap (S) = \{A, B\}$

$(D)$  coupe  $(S)$  en deux points A et B  
(Deux points mais pas le segment  $[AB]$ )

CONDITION :  $d = \Omega H < R$

2<sup>ème</sup> CAS /  
 $(D) \cap (S) = \{H\}$

$(D)$  et  $(S)$  sont tangents en H avec  $(H\Omega) \perp (D)$

CONDITION :  
 $d = \Omega H = R$

1<sup>er</sup> CAS :  $(D) \cap (S) = \emptyset$

$(P)$  et  $(S)$  sont disjoints

CONDITION :  $d = \Omega H > R$

REMARQUE :  
REMARQUE :

- Remarques :
- H est la projection de Ω sur  $(D)$ .
  - Si  $(D) = D(K, \vec{u})$  on a  $d = \Omega H = \frac{\|K\vec{\Omega} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$  (voir chapitre produit vectoriel).