

Géométrie dans l'espace

Forme analytique du :

-Produit scalaire :

-Norme d'un vecteur :

- Distance :

- Produit vectoriel :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$

propriétés

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Droite $D(A, \vec{u})$
passant par A et de
vecteur directeur
 $\vec{u}(a, b, c)$

Représentation paramétrique de la droite (D): $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Distance d'un point M à la droite (D): $d(M, (D)) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Plan dans
l'espace

Equation cartésienne d'un plan (P)

$$(P): ax + by + cz + d = 0$$

$\Leftrightarrow \vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal au plan (P)

Distance d'un point Ω au plan (P): $d(\Omega, (P)) = \frac{|ax_{\Omega} + by_{\Omega} + cz_{\Omega} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

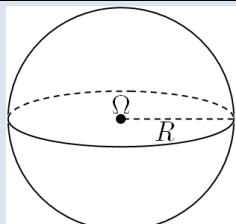
Si les points A et B et C ne sont pas colinéaires alors $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Sphère

Equation cartésienne d'une sphère (S)

de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R :

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

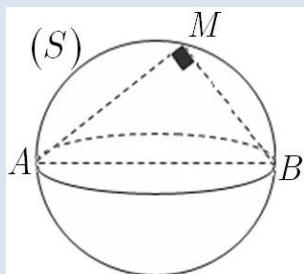


➤ On détermine l'équation cartésienne

d'une sphère (S) dont $[AB]$ est l'un de

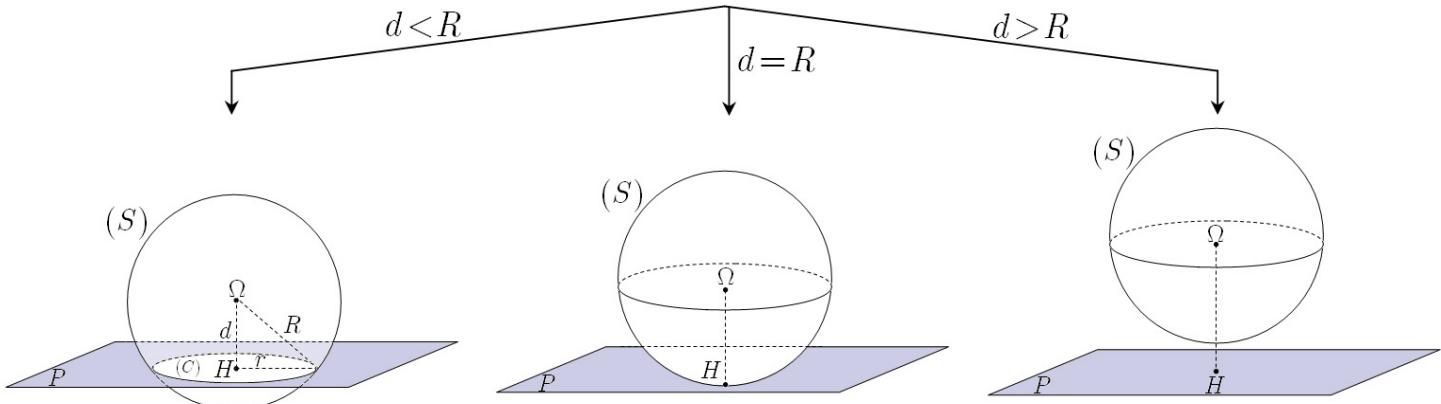
ses diamètres en utilisant l'équivalence

suivant : $M \in (S) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$



❖ Intersection d'une sphère $S(\Omega, R)$ et d'un plan (P) :

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur le plan (P), on pose $d = \Omega H = d(\Omega, (P))$



Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Le plan (P) est tangent à la sphère (S) en H

Le plan (P) ne coupe pas la sphère (S)

Equation cartésienne d'un plan (P) tangent à une sphère $S(\Omega, R)$ en un point A

Méth1 :

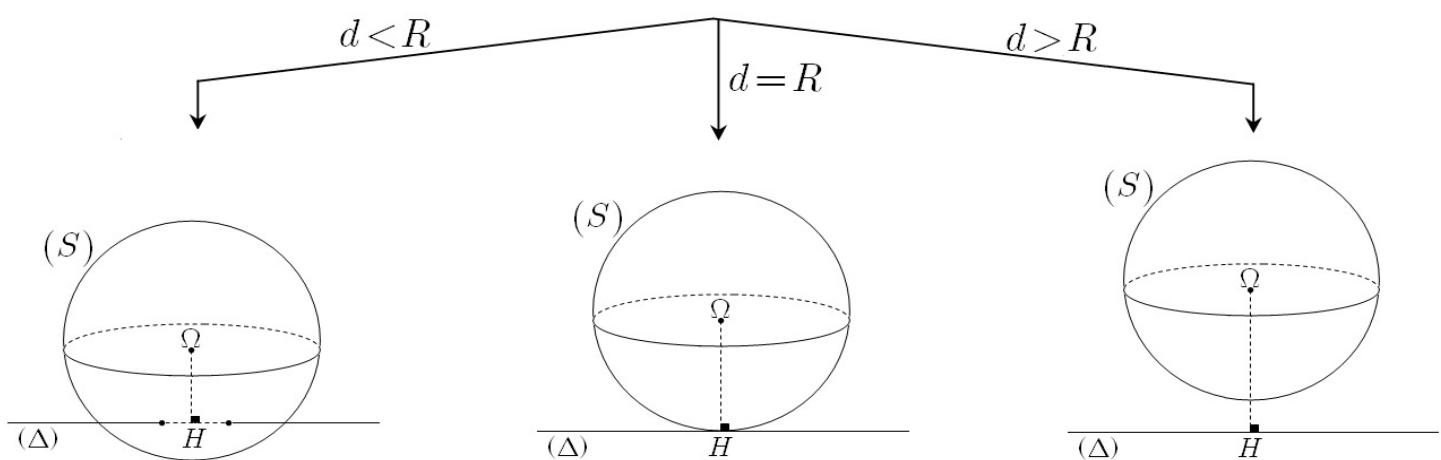
on utilise l'équivalence : $M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{A\Omega} = 0$

Méth2 :

$\vec{A\Omega}$ est un vecteur normal au plan (P) ... etc

❖ Intersection d'une sphère $S(\Omega, R)$ et d'une droite (D) :

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur la droite (D), on pose $d = \Omega H = d(\Omega, (D))$



La droite (D) coupe la sphère (S) en deux points distincts

La droite (D) est tangente à la sphère (S) en H

La droite (D) ne coupe pas la sphère (S)

L'aire d'un triangle ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

L'aire d'un parallélogramme ABCD :

$$S_{ABCD} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$