Géométrie dans l’espace

EL KYAL MOHAMED

L’espace est rapporté à un repère orthonormé direct $o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

Expressions analytiques :

Soient $\vec{u}\ \ a,b,c$ et $\vec{v}\ \ a',b',c'$ deux vecteurs

- **Produit scalaire :** $\vec{u}.\vec{v}=aa'+bb'+cc'$
- **Norme :** $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- **Produit vectoriel :** $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$

Aire d’un triangle :

L’aire d’un triangle ABC est: $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

Distances :

La distance entre deux points A et B est :

$$AB=\sqrt{\ x_B-x_A\ ^2+\ y_B-y_A\ ^2+\ z_B-z_A\ ^2}$$

La distance du point M au plan P d’équation $ax+by+cz+d=0$ est:

$$d\ \ M;\ P\ \ =\frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

La distance du point M à la droite $\Delta\ \ A,\vec{u}$ est: $d\ \ M,\ \Delta\ \ =\frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Equation cartésienne d’un plan :

$\vec{n}\ \ a,b,c$ est un vecteur normal au plan P $\Leftrightarrow$ $P\ :ax+by+cz+d=0$

Si $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors les points A, B et C ne sont pas alignés

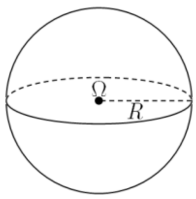
Dans ce cas : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan ABC et l’équation cartésienne du plan ABC peut être déterminé à l’aide de l’équivalence suivante :

$$M\in\ ABC\ \Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\ =0$$

Equation cartésienne d’une sphère:

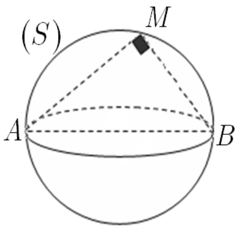
L’équation cartésienne d’une sphère de centre $\Omega\ \ a,b,c$ et de rayon R est :

$$x-a\ ^2+\ y-b\ ^2+\ z-c\ ^2=R^2$$



- **Ensemble des points M de l'espace vérifiant :** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

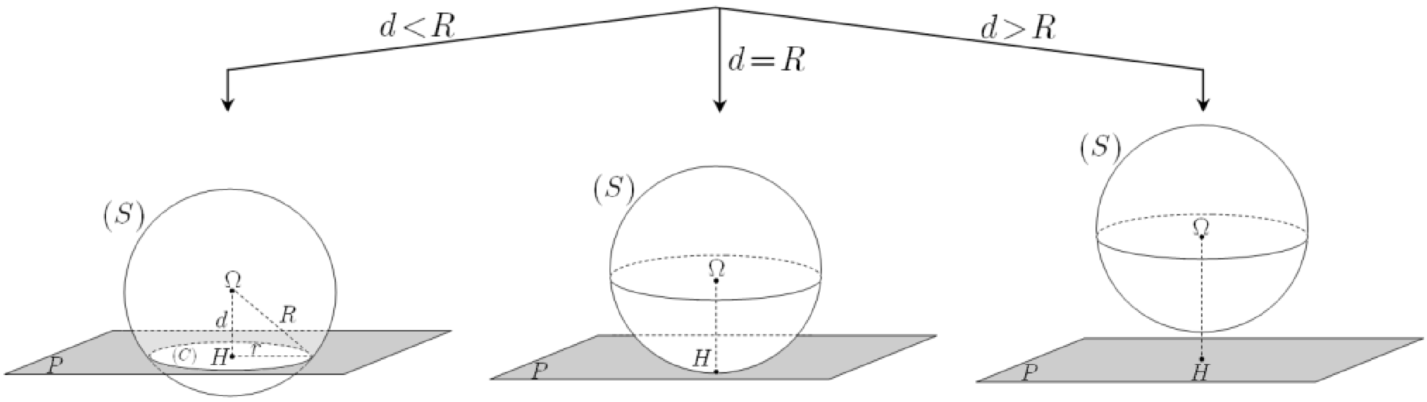
L'ensemble des points de l'espace vérifiant :
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$



- **Intersection d'une sphère et d'un plan :**

Soit la sphère (S) de centre Ω et de rayon R et le plan P

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur le plan P . On pose : $d=\Omega H=d\ \Omega;\ \mathrm{P}$



P coupe S selon un cercle C de centre H et de rayon : $r=\sqrt{R^2-d^2}$

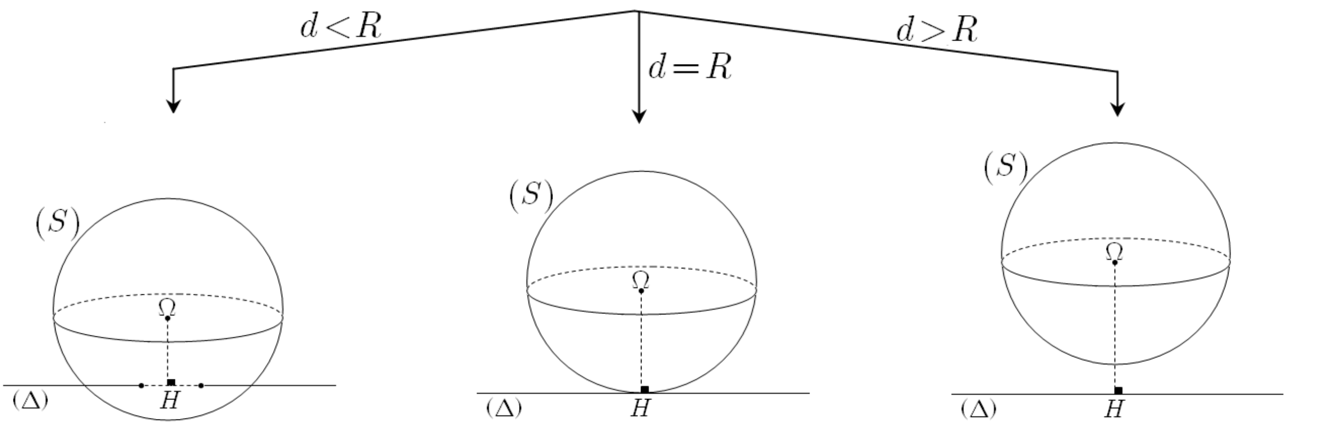
P est tangent à S en H

P ne coupe pas S

- **Intersection d'une sphère et d'une droite :**

Soit la sphère (S) de centre Ω et de rayon R et la droite Δ .

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur la droite Δ . On pose : $d=\Omega H=d\ \Omega;\ \Delta$



Δ coupe S en deux points distincts

Δ est tangente à S en H

Δ ne coupe pas S