



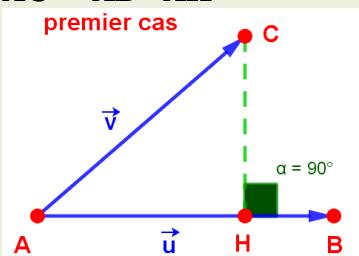
## I. Produit scalaire dans l'espace :

### a. Définition :

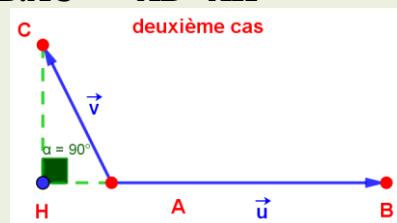
$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nul de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) ; A et B et C trois points de ( $\mathcal{E}$ ) tel que :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  ; H est la projection de C sur la droite ( $AB$ ) .

Le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est noté par  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  ou  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  tel que :

1<sup>ER</sup> cas le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le nombre:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$



2<sup>ième</sup> cas le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le nombre:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$



Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  on a  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

### b. Remarques :

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$  est le carré scalaire de  $\vec{u}$  est toujours positif .
- $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$  est la norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  on note :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$ .
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  .
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$  ou  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .
- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaire )  $\Leftrightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

### c. Propriétés :

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) ;  $\alpha \in \mathbb{R}$  on a :

1.  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

2. Symétrie du produit scalaire :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  .

3. Positivité du produit scalaire :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 \geq 0$  .

4. Non dégénérescence :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

5. Linéarité du produit scalaire :  $\begin{cases} (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

6.  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$  et  $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$  et  $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$  .



### d. Application :

Soit ABCD un tétraèdre de faces régulières ( chaque face est un triangle équilatéral de coté a pour longueur

- Montrer que deux cotés opposés sont orthogonaux ( exemple le côté opposé de [AB] est le côté [DC] ).

**Correction :**

On montre que :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ .

On a :

$$\checkmark \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \times a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2} \quad (1)$$

$$\checkmark \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = a \times a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \text{D'où : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad (\text{d'après (1) et (2)}). \end{aligned}$$

Donc :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

**Conclusion :**  $(AB) \perp (CD)$ . ( De la même façon on démontre que :  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$  et  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$  )

## III. Base et repère orthonormé :

### a. Rappel :

$\vec{u}(x,y,z)$  et  $\vec{v}(x',y',z')$  et  $\vec{w}(x'',y'',z'')$  trois vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) rapporté à une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

- Le déterminant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $w$  dans cet ordre est le nombre :

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \\ &= (xy'z'' - xz'y'') + (-yx'z'' + yz'x'') + (zx'y'' - zy'x'') \end{aligned}$$

- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $w$  sont coplanaires si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ .

### b. Exemple :

$\vec{u}(1,2,3)$  et  $\vec{v}(-2,0,1)$  et  $\vec{w}(1,0,3)$  on a :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times (-7) + 3 \times 0 = 14$$

D'où :  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

**Conclusion :**



- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  ne sont pas coplanaires donc le triplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de l'espace  $(\mathcal{E})$ .
- On prend un point  $O$  de l'espace  $(\mathcal{E})$  le quadruplet  $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est un repère de l'espace  $(\mathcal{E})$ .

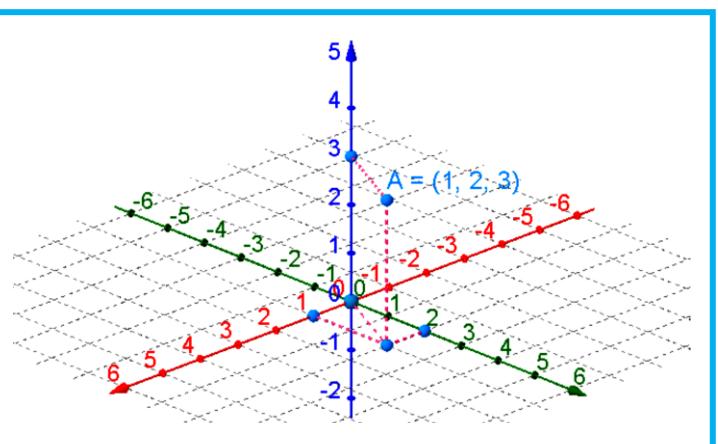
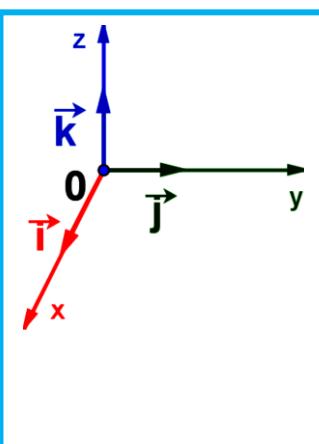
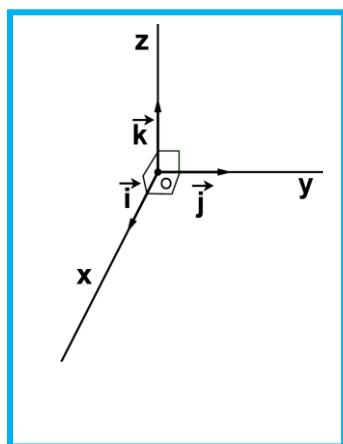
**c. Technique :**

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{x}' & \vec{x}'' \\ \vec{y} & \vec{y}' & \vec{y}'' \\ \vec{z} & \vec{z}' & \vec{z}'' \end{vmatrix} = (1) + (2) + (3) - (4) - (5) - (6)$$

(4) (5) (6)      (1) (2) (3)

**d. Définitions :**

- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base de l'espace  $(\mathcal{E})$  équivaut à  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  ne sont pas coplanaires ( $\det(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \neq 0$ )
- Prenons un point  $O$  de l'espace  $(\mathcal{E})$  le quadruplé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est appelé repère de  $(\mathcal{E})$
- Si  $\vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$  et  $\|\vec{j}\| = \|\vec{i}\| = \|\vec{k}\| = 1$  alors :
  - ❖ la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée.
  - ❖ le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthonormé.



- Le reste de ce chapitre ; on considère l'espace  $(\mathcal{E})$  est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .



- On prend  $\vec{u}(x,y,z) = xi + yj + zk$  et  $\vec{v}(x',y',z') = x'i + y'j + z'k$  et  $M(x,y,z)$  et  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $B(x_B, y_B, z_B)$  et  $C(x_C, y_C, z_C)$ .

### III. Expression analytique de $\vec{u}, \vec{v}$

#### a. Activité :

- On a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (xi + yj + zk) \cdot (x'i + y'j + z'k)$  on utilise la linéarité du produit scalaire donner  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  en fonction de  $x$  et  $y$  et  $z$  et  $x'$  et  $y'$  et  $z'$ .
- Ecrire  $\|\vec{u}\|$  en fonction de  $x$  et  $y$  et  $z$ .
- Donner la distance  $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$  en fonction de  $x_A$  et  $y_A$  et  $z_A$  et de  $x_B$  et  $y_B$  et  $z_B$ .
- Donner la propriété .

#### b. Propriété :

- Le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$ .
- La norme du vecteur  $\vec{u}$  est :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
- La distance AB est :  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ .

#### c. Application :

$\vec{u}(1,2,3)$  et  $\vec{v}(5,7,4)$  deux vecteurs et  $A(1,5,7)$  et  $B(2,9,8)$  deux points de l'espace (ε).

- Calculons :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{v}\|$  et  $AB$ .

Correction :

- Calculons :

$$\checkmark \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 4 = 31.$$

$$\checkmark \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \text{ et } \|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{88}.$$

$$\checkmark \quad \text{On a : } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 9-5 \\ 8-7 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ d'où : } AB = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18}.$$

Conclusion :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 31$  et  $\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$  et  $\|\vec{v}\| = \sqrt{88}$  et  $AB = \sqrt{18}$ .



**IV.** Ensemble des points  $M(x, y, z)$  tel que :  $\vec{AM} \cdot \vec{u} = k$  avec  $\vec{u}(a, b, c)$  ;  $(\vec{u} \neq \vec{0})$  :

a. Propriété :

A( $x_A, y_A, z_A$ ) est un point et  $\vec{u}(a, b, c)$  est un vecteur non nul de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) et  $k \in \mathbb{R}$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) tel que  $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$  est un plan ( $P$ ) d'équation de la forme :  $ax + by + cz + d = 0$ .

b. Application :

Soient A(1,1,1) et  $\vec{u}(0,1,0)$ .

1. On détermine ( $P$ ) ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) tel que  $\vec{u} \cdot \vec{AM} = 0$

Correction :

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{AM} = 0$$

On a :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = 0$$

Conclusion : ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) tel que  $\vec{u} \cdot \vec{AM} = 0$  est le plan d'équation ( $P$ ) :  $y = 1$ .

**V.** Plan déterminer par un point et un vecteur normal :

**01.** Vecteur normal à un plan :

a. Définition :

Tout vecteur  $\vec{n}$  non nul sa direction est perpendiculaire au plan ( $P$ ) s'appelle vecteur normal au plan ( $P$ ).

b. Remarques :

- $\vec{n}$  est normale au plan  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$  alors  $\vec{n} \perp \vec{u}$  et  $\vec{n} \perp \vec{v}$ .
- Si  $\vec{n}$  est normale au plan ( $P$ ) et passe par A le plan ( $P$ ) est noté par  $P(A, \vec{n})$ .



## 02. Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $ax+by+cz+d=0$ :

### a. Propriété :

L'ensemble des points  $M(x,y,z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) qui vérifie  $ax+by+cz+d=0$  avec  $(a,b,c) \neq (0,0,0)$  est le plan et le vecteur non nul  $\vec{n}(a,b,c)$  est un vecteur normal à ce plan .

### b. Application :

- Que représente l'ensemble des points  $M(x,y,z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) qui vérifie  $x+2y-z+4=0$  .

Repense : l'ensemble des points  $M(x,y,z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) est le plan ( $P$ ) tel que :

- ✓ le vecteur  $\vec{n}(1,2,-1)$  est normal à ( $P$ ) .
- ✓ le plan ( $P$ ) passe par le point  $A(0,0,4)$  .
- ✓ donc  $(P)=P(A,\vec{n})$  .

## 03. Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ :

### a. Propriété :

$\vec{n}(a,b,c) \neq \vec{0}$  est un vecteur non nul et  $A(x_A, y_A, z_A)$  est un point de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) .

L'ensemble des points  $M(x,y,z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) qui vérifie :  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  est le plan ( $P$ ) qui passe par  $A$  et le vecteur  $\vec{n}$  est un vecteur normal à ce plan ( c.à.d.  $P(A,\vec{n})$  ) .

Le plan ( $P$ ) a pour équation cartésienne de la forme  $ax+by+cz+d=0$  avec  $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$

### b. Application :

On détermine une équation cartésienne du plan ( $P$ ) passant par le point  $A(2,1,-3)$  et  $\vec{n}(1,1,2)$  est un vecteur normal à ( $P$ ) .

Soit  $M(x,y,z)$  un point de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) .

On a :  $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2) \times 1 + (y-1) \times 1 + (z+3) \times 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x+y+2z+3=0 \end{aligned}$$

Conclusion : équation cartésienne de ( $P$ ) est ( $P$ ) :  $x+y+2z+3=0$  .



**c. Propriété :**

tout plan  $P(A, \vec{n}(a,b,c))$  a pour équation cartésienne de la forme  $ax+by+cz+d=0$  la réciproque avec  $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ .



**d. Preuve :**

On montre que : le vecteur  $\vec{n}(a,b,c)$  est normal à ce plan  $(P)$ .

On a :  $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0 ; (1)$

$A(x_0, y_0, z_0) \in (P) \Leftrightarrow ax_0+by_0+cz_0+d=0 ; (2)$

La différence entre (1) et (2) on obtient :

$$\begin{aligned} a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \end{aligned}$$

D'où :  $\vec{n}(a,b,c)$  est normal à ce plan.

**e. Application :**

1. On donne l'équation du plan  $P(O, \vec{i}, \vec{j})$  et le point  $A(0,0,m)$  avec  $m \in \mathbb{R}$ .

1<sup>ère</sup> méthode :

$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  et  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{i}, \vec{j}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-0 & 1 & 0 \\ y-0 & 0 & 1 \\ z-m & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (z-m) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - 0 + (z-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow z - m = 0$$

Conclusion : équation du plan  $P(O, \vec{i}, \vec{j})$  est  $P(O, \vec{i}, \vec{j}) : z = m$ .

2<sup>ème</sup> méthode :

Puis que le repère est orthonormé donc  $\vec{k}(0,0,1)$  est normal au plan  $P(O, \vec{i}, \vec{j})$  donc

équation de  $P(O, \vec{i}, \vec{j})$  est de la forme  $0 \times x + 0 \times y + 1 \times z + d = 0$  ou encore  $z + d = 0$

On sait que :  $A(0,0,m) \in P(O, \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow m + d = 0$  donc  $d = -m$ .



**Conclusion :** équation du plan  $P(O, \vec{i}, \vec{j})$  est  $P(O, \vec{i}, \vec{j}) : z = m$ .

**3<sup>ème</sup> méthode :**

Puis que le repère est orthonormé donc  $\vec{k}(0, 0, 1)$  est normal au plan  $P(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \\ z - m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 0) \times 0 + (y - 0) \times 0 + (z - m) \times 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z - m = 0$$

**Conclusion :** équation du plan  $P(O, \vec{i}, \vec{j})$  est  $P(O, \vec{i}, \vec{j}) : z = m$ .

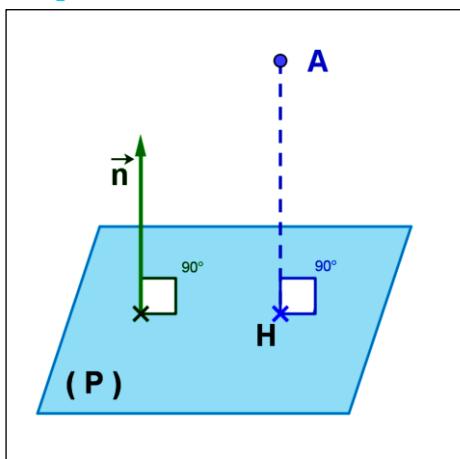
## **VI. Distance d'un point à un plan :**

### a. Définition :

$(P)$  est un plan et  $A$  est un point de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) et  $H$  est la projection orthogonale de  $A$  sur le plan  $(P)$

$(P)$  la distance du point  $A$  au plan  $(P)$  est  $AH$  et on note  $AH = d(A, (P))$ .

### b. Exemple :



### c. Propriété :

$(P)$  est un plan et  $A(x_A, y_A, z_A)$  est un point de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) tel que  $(P)$  a pour équation

$(P) : ax + by + cz + d = 0$ .

La distance du point  $A$  au plan  $(P)$  est  $AH = d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .

### d. Preuve :

On considère  $H(x_H, y_H, z_H)$   $H$  est la projection orthogonale de  $A$  sur le plan  $(P)$ .

- On sait que : le vecteur  $\vec{n}(a, b, c)$  est normal à ce plan  $(P)$  ( $\vec{n} \perp (P)$ ) (1)



- $H$  est la projection orthogonale de  $A$  sur le plan  $(P)$  donc  $\overrightarrow{AH} \perp (P)$ . (2)
- $H \in (P) \Leftrightarrow ax_H + by_H + cz_H + d = 0$  ; donc :  $ax_H + by_H + cz_H = -d$ .
- D'après (1) et (2) on obtient  $\vec{n}$  et  $\overrightarrow{AH}$  sont colinéaires , d'où  $|\cos(\overrightarrow{AH}, \vec{n})| = 1$  et  
 $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \|\vec{n}\| |\cos(\overrightarrow{AH}, \vec{n})| = AH \|\vec{n}\|$  on obtient  $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \|\vec{n}\|$  (4)

- D'autre part : le produit scalaire est :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} &= \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) + c(z_H - z_A) \\ &= ax_A + by_A + cz_A - \underbrace{(ax_H + by_H + cz_H)}_{-d} \\ &= ax_A + by_A + cz_A + d\end{aligned}$$

D'où :  $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = |ax_A + by_A + cz_A + d|$  (3)

D'après (3) et (4) on obtient  $AH \|\vec{n}\| = |ax_A + by_A + cz_A + d|$

D'où :  $AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\|\vec{n}\|}$ .

#### e. Application :

On considère le plan d'équation  $(P)x + 3y - 5z + 1 = 0$ .

1. Est-ce que :  $A(1,1,1) \in (P)$

On a :  $(P)1 + 3 \times 1 - 5 \times 1 + 1 = 4 - 5 + 1 = 0$  d'où :  $A(1,1,1) \in (P)$

2. Donner la distance  $d(A, (P))$

1<sup>ère</sup> méthode :

✓ Puis que  $A(1,1,1) \in (P)$  donc la projection orthogonale de  $A$  sur le plan  $(P)$  est  $A = H$

Donc  $AH = AA = 0$  donc  $d(A, (P)) = 0$ .

**Conclusion :** la distance  $d(A, (P)) = 0$ .

2<sup>ième</sup> méthode :

✓ On applique la propriété :

$$AH = d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 + 3 \times 1 - 5 \times 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-5)^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{35}} = 0$$

**Conclusion :** la distance  $d(A, (P)) = 0$

#### VII. Parallélisme et orthogonalité des droites et des plans :

### **01. Parallélisme et orthogonalité de deux plans :**

**a. Propriétés :**

$$(P_1) : ax + by + cz + d = 0 \text{ et } (P_2) : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

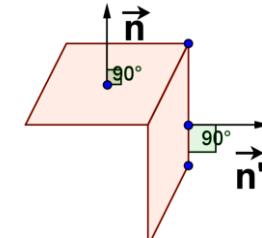
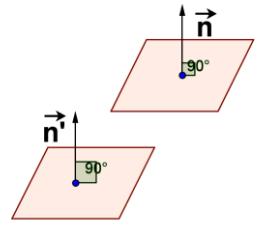
$$(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow (\vec{n} \text{ et } \vec{n}' \text{ sont colinéaires})$$

$$(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ (non nuls)}$$

$$(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \text{ (} \vec{n} \text{ et } \vec{n}' \text{)}$$

$$(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow \vec{n}' = \alpha \vec{n}$$

$$(P_2) \perp (P_1) \Leftrightarrow \vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$$

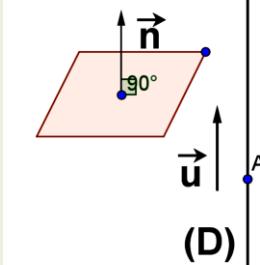
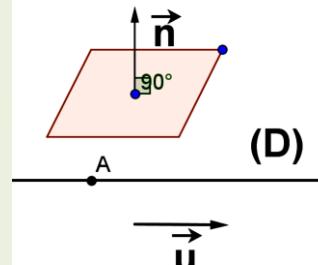


### **02. Parallélisme et orthogonalité d'une droite et un plan :**

$$P(B, \vec{n}) \text{ et } D(A, \vec{u}) \text{ et } (P) : ax + by + cz + d = 0$$

$$(D) \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(D) \perp (P) \Leftrightarrow (\vec{n} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires})$$



## **VIII. Etude analytique du sphère :**

### **01. Sphère :**

**a. Définition :**

$\Omega$  est un point donné de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) et  $R > 0$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ )

tel que  $\Omega M = R$  s'appelle le sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  on note  $(S)$  ou  $S(\Omega, R)$ .

### **02. Equation cartésienne d'une sphère :**

**a. Définition propriété :**

Equation cartésienne de  $(S) = S(\Omega(a, b, c), r)$  est :  $M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R$  ou

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = R^2 \text{ ou bien : } x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ avec } d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$$

**b. Application :**

On donne l'équation cartésienne du sphère  $S(O(0,0,0), 1)$

$$\text{on a : } (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 1^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Conclusion : l'équation cartésienne du sphère  $S(O(0,0,0), 1)$  est  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .



### 03. Equation cartésienne du sphère déterminé par un diamètre $[AB]$ .

a. Définition :

$\Omega$  est le milieu de  $[AB]$ ;  $[AB]$  est un diamètre du sphère  $(S)$  donc A et B appartiennent à  $(S)$

On dit la sphère de diamètre  $[AB]$  on note  $(S)$  ou  $S_{[AB]}$ .

b. Propriété :

Equation cartésienne de  $S_{[AB]}$  est :  $M(x,y,z) \in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

ou bien  $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$ .

c. Preuve :

Soit I le milieu de  $[AB]$  ( centre du sphère  $(S)$  ).

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \\ &\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}(-\overrightarrow{IA}) = 0 \\ &\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{0} - IA^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = IA^2 \\ &\Leftrightarrow MI = IA \\ &\Leftrightarrow M \in S_{(I,r=IA)} \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des points  $M(x,y,z)$  de l'espace  $(E)$  qui vérifie  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  c'est le sphère

$(S)$  de centre I le milieu de  $[AB]$  et de rayon  $r = IA = \frac{AB}{2}$  ou encore le sphère  $S_{[AB]}$  de diamètre  $[AB]$

d. Exemple :

Soient  $A(0,1,0)$  et  $B(0,-1,0)$  deux points de l'espace  $(E)$ .

On détermine l'équation cartésienne du sphère  $S_{[AB]}$  :

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in S_{[AB]} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 ; \quad \left( \text{ou } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{aligned}$$

Conclusion : l'équation cartésienne du sphère  $S_{[AB]}$  est  $S_{[AB]} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**04.** L'ensemble des  $M(x,y,z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) tel que  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$  :

**a. Propriété :**

L'ensemble des  $M(x,y,z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) tel que  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$  avec  $a$  et  $b$  et  $c$  et  $d$  de  $\mathbb{R}$  on pose  $A = a^2 + b^2 + c^2 - 4d$  est :

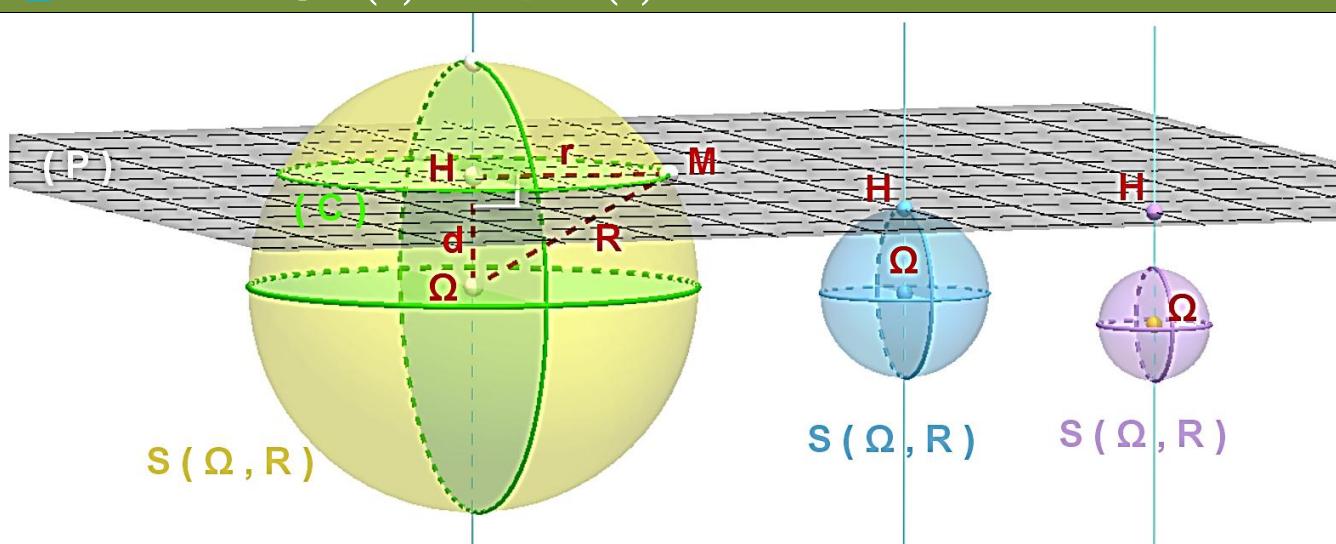
- $(E) = \emptyset$  si  $A < 0$ .
- $(E) = \left\{ \Omega \left( -\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right) \right\}$  si  $A = 0$ .
- Le Sphère  $(E) = S \left( \Omega \left( -\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right), R = \frac{\sqrt{A}}{2} \right)$  si  $A > 0$ .



**IX. Positions relatives d'une sphère et un plan :**

**01. Positions et les schémas et théorème:**

**a. Intersection d'un plan ( $P$ ) et une sphère ( $S$ )**

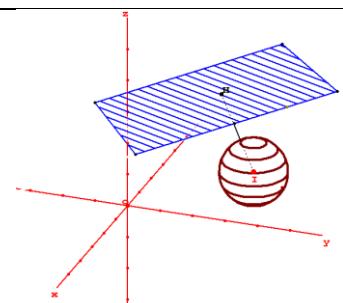
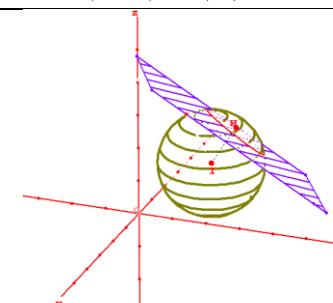
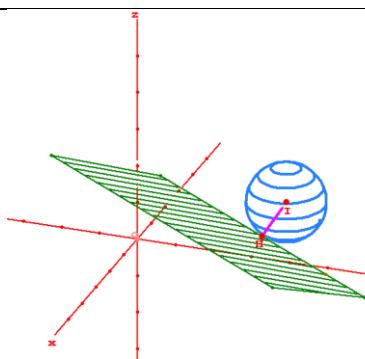


**b. Théorème :**

**3<sup>ème</sup> CAS :**  $d = \Omega H < R$  on a  $(P) \cap (S) = (C)$   
 $(P)$  coupe  $(S)$  suivant le cercle de centre  $H$  et de rayon  $R_C = \sqrt{R_s^2 - d^2}$   $R_C = r$  et  $R_s = R$

**2<sup>ième</sup> CAS :**  $d = \Omega H = R$  on a  $(P) \cap (S) = \{H\}$  ( $P$ ) et  $(S)$  sont tangents en  $H$  avec  $(H\Omega) \perp (P)$

**1<sup>er</sup> CAS :**  $d = \Omega H > R$  on a  $(P) \cap (S) = \emptyset$  ( $P$ ) et  $(S)$  son disjoints



a. Remarques :

- H est la projection de  $\Omega$  sur  $(P)$  et  $d = \Omega H = d(\Omega, (P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .
- on détermine H par l'intersection du plan  $(P)$  et la droite  $(D)$  perpendiculaire au plan passant par  $\Omega$
- Vecteur normal  $\vec{n}$  au plan  $(P)$  est un vecteur directeur de la droite  $(D)$ .

**Q2.** Equation du plan tangent à une sphère :

a. Théorème :

par un point A quelconque d'une sphère  $(S)$  il existe un et un seul plan  $(Q)$  tangent à la sphère  $(S)$  au point A . l'équation de  $(Q)$  est :  $M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$

**X.** Positions relatives d'une sphère et une droite :

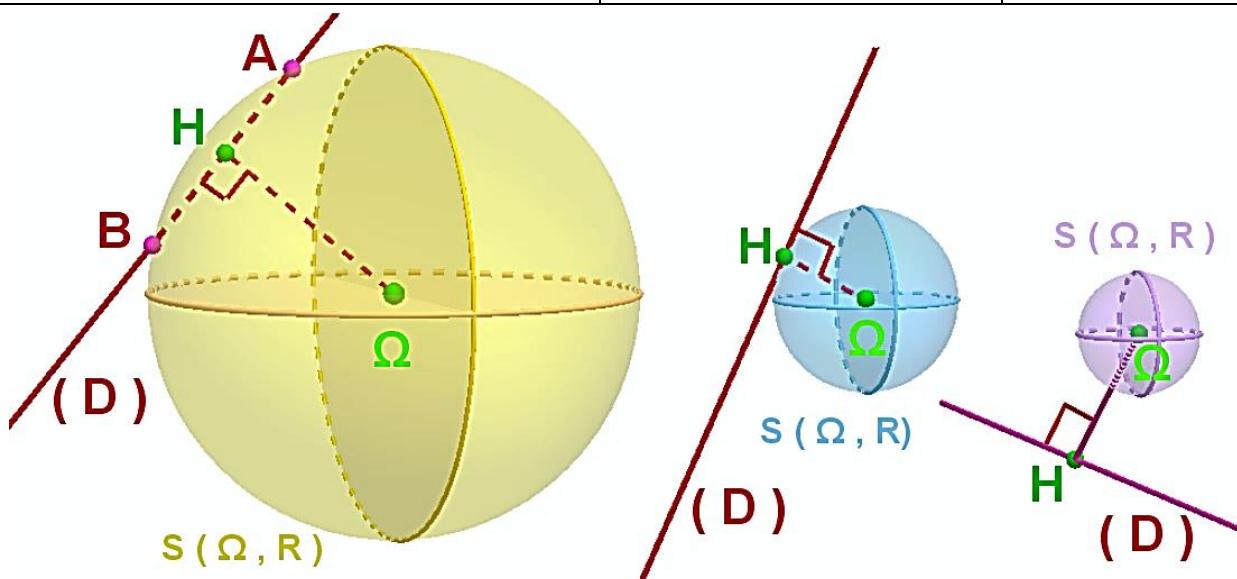
**Q1.** Positions et les schémas et théorème :

a. Intersection d'une droite  $(D)$  et une sphère  $(S)$

3<sup>ème</sup> CAS :

2<sup>ème</sup> CAS

1<sup>er</sup> CAS :



b. théorème

3<sup>ème</sup> CAS :  $(D) \cap (S) = \{A, B\}$

2<sup>ème</sup> CAS /  $(D) \cap (S) = \{H\}$

1<sup>er</sup> CAS :  $(D) \cap (S) = \emptyset$

$(D)$  coupe  $(S)$  en deux points A et B

( Deux points mais pas le segment  $[AB]$  )

$(D)$  et  $(S)$  sont tangents

en H avec  $(H\Omega) \perp (D)$

$(P)$  et  $(S)$  son disjoints

CONDITION :  $d = \Omega H < R$

CONDITION :  $d = \Omega H = R$

CONDITION :  $d = \Omega H > R$

- H est la projection de  $\Omega$  sur  $(D)$  .

REMARQUES

- Si  $(D) = D(K, \vec{u})$  on a  $d = \Omega H = \frac{\|\vec{K}\Omega \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$  ( voir chapitre produit vectoriel ) .