Niveau: 2 P.C. + 2 S.V. SERIE 10 équations différentielles page 1

1.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. ..
   a. $5y' = 0$.
   b. $y' = -8y$.
2. $y' = 5y + 1$ puis déterminer la solution qui vérifie la condition $g(0) = 2$.
3. ..
   a. $(E): y' + 2y = 0$.
   b. Montrer que : $y_0 = e^{-3x}$ est solution de l'équation : $(E'): y' + 2y = -e^{-3x}$.

2.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(E): 4y'' - 4y' + y = 0$.
2. $(E): y'' - 2y' + 5y = 0$.
3. ..
   a. $(E): y'' - 3y' + 2y = 0$.
   b. Déterminer la solution qui vérifie les conditions $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$ (bac 2016 session normale)

3.

1. Résoudre l'équation différentielle suivante : (E_1) : $\begin{cases} y' = \frac{2}{x} - 1 + 4x \\ y(1) = -7 \end{cases}$.
2. Résoudre l'équation différentielle suivante : (E_2) : $\begin{cases} 2y' + 14y = 5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.
3. Résoudre l'équation différentielle suivante : (E_3) : $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \ ; \ y'(0) = -3 \end{cases}$.

4.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 7 = 0$.
2. Résoudre l'équation differentielle suivante : $y'' - 4y' + 7y = 0$.

5.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 6z + 12 = 0$.
2. Résoudre l'équation differentielle suivante : $y'' + 6y' + 12y = 0$.

6.

On considère l'équation différentielle suivante : $(E): y'' - 2y' + y = 0$.

1. Résoudre l'équation (E) .
2. Déterminer la fonction h qui vérifie l'équation (E) et sa courbe passe par le point $O(0;0)$ et $h'(0) = -1$

3. Vérifie que : la fonction $g(x)=2-xe^{x}$ vérifie l'équation $(E_1): y''-2y'+y=2$.

7.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4z+29=0$.
2. Résoudre l'équation differentielle suivante : $y''-4y'+29y=0$.
3. Déterminer la fonction $g(x)$ solution de l'équation (E) tel que : $g(0)=1$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\pi}$

8.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$. On notera z_1 et z_2 les solutions trouvées , z_1 étant la solution de partie imaginaire positive .
2. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2 puis donner l'écriture exponentielle de z_1 et de z_2.
3. Résoudre l'équation differentielle suivante : $y''-2\sqrt{3}y'+4y=0$.

9.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z+9=0$. On notera z_1 et z_2 les solutions trouvées , z_1 étant la solution de partie imaginaire positive .
2. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2 puis donner l'écriture exponentielle de z_1 et de z_2.
3. Résoudre l'équation differentielle suivante : $y''-6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)y'+9y=0$.

10.

On considère l'équation suivante : (E) : $z\in\mathbb{C}$, $z^2-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}z+1=0$.

1. Montrer que : $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.
2. Déterminer : z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) avec $\mathrm{Im}(z_1)>0$.
3. On déduit les solutions de l'équation différentielle suivante : $(E): 2y''-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)y'+2y=0$.
4. Donner l'écriture trigonométrique de : z_1 et z_2 .

11.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-6z+13=0$.
2. Résoudre l'équation differentielle suivante : (E) : $y''-6y'+13y=0$.
3. Déterminer la fonction f solution de (E) tel que : $f(0)=0$ et $f'(0)=2$.
4. En déduit la valeur de $\int_0^{\pi} e^{3x}\sin(2x)dx$.

12.

On considère l'équation differentielle suivante (E) : $y''-4y'+13y=0$.

1. Résoudre l'équation differentielle (E)
2. ..

a. Déterminer la solution de l'équation (E) qui vérifie les conditions $g(0)=0$ et $g'(0)=3$.

b. En déduit la valeur de $\int_0^{\pi} e^{2x}\sin(3x)dx = \frac{3}{13}\left(1+e^{2\pi}\right)$.

c. A l'aide d'une intégration par partie calculer l'intégral suivant : $\int_0^{\pi} e^{2x}\cos(3x)dx$

13.

On considère l'équation différentielle suivante : (E) : $y'-2y=2\left(e^{2x}-1\right)$ tel que la fonction y définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction : $h(x)=2xe^{2x}+1$ est solution de l'équation (E) .
2. On pose : $y=z+h$ tel que Z est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - a. Montrer que : si y est solution de l'équation (E) alors z est solution de l'équation $z'-2z=0$.
   - b. Montrer que : si z est solution de l'équation $z'-2z=0$ alors y est solution de l'équation (E) .
   - c. Ecrire l'équivalence obtenue .
   - d. Résoudre l'équation : (E') : $z'-2z=0$ puis déduis les solutions de l'équation (E) .
   - e. Déterminer la fonction f solution de (E) qui vérifie $f(0)=0$.