



Approche

- $f$  est une fonction ; on la note par  $y$  .
- $f'$  est sa dérivée ; on la note par  $y'$  .
- L'écriture  $f'(x) = af(x) + b$  on la note par  $y' = ay + b$  on l'appelle équation différentielle linéaire de première degré de coefficients constants  $a$  et  $b$  .
- Toute fonction  $g$  dérivable qui vérifie cette équation différentielle ( $g'(x) = ag(x) + b$ ) on l'appelle solution particulière de l'équation différentielle .
- Résoudre une équation différentielle c'est de trouver toutes les fonctions qui vérifient l'équation différentielle (c'est-à-dire de trouver la solution générale) .
- Le programme se limite aux équations différentielles de la forme .
  - 1)  $y' = ay + b$  avec  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$
  - 2)  $y'' + ay' + by = 0$  avec  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$  .

Equation différentielle de la forme

$$y' = ay + b$$

$a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$

Equation différentielle de la forme  $y'' + ay' + by = 0$

$a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$

Cas possibles suivants les valeurs de  $a$

Solution générale (les fonctions  $f(x)$  ou  $y(x)$  ou simplement  $y$ )

- L'équation  $r \in \mathbb{C} : r^2 + ar + b = 0$  s'appelle l'équation caractéristique de l'équation :  $y'' + ay' + by = 0$
- $\Delta = a^2 - 4b$
- solution générale de l'équation différentielle dépend du signe de  $\Delta$  ; donc on a trois cas :

$a = 0$  et  $b = 0$   
c.à.d.  
l'équation :  
 $y' = 0$

$$y(x) = f(x) = c$$

$c \in \mathbb{R}$

1<sup>er</sup> cas :  $\Delta > 0$

- Donc l'équation caractéristique a deux solutions réelles sont :  $r_1$  et  $r_2$  .
- D'où la solution générale de  $y'' + ay' + by = 0$  sont les fonctions de la forme :  $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$  ;  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$

$a = 0$  et  $b \neq 0$   
c.à.d.  
l'équation :  
 $y' = b$

$$f(x) = bx + c$$

$c \in \mathbb{R}$

2<sup>er</sup> cas :  $\Delta = 0$

Donc l'équation caractéristique a une solution réelle est  $r_1$  .  
D'où la solution générale de  $y'' + ay' + by = 0$  sont les fonctions de la forme :  $y(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_1 x}$  ;  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$

$a \neq 0$   
c.à.d.  
l'équation :  
 $y' = ay + b$

$$f(x) = c \times e^{ax} - \frac{b}{a}$$

$c \in \mathbb{R}$

3<sup>ième</sup> cas :  $\Delta < 0$

Donc l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées sont :  $r_1 = p + qi$  et  $r_2 = \bar{r}_1 = p - qi$   
D'où la solution générale de  $y'' + ay' + by = 0$  sont les fonctions de la forme :  $y(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)) e^{px}$  ;  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$  .

il existe une seule fonction  $f$  qui vérifie la condition initiale  $f(x_0) = y_0$  avec  $x_0$  et  $y_0$  de  $\mathbb{R}$  pour  $y' = ay + b$  pour l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$  il faut donner au moins deux conditions initiales