

CALCULS INTEGRALES

Exercices d'applications et de réflexions

PROF : ATMANI NAJIB

2BAC sciences expérimentales (pc et svt.)

TD : CALCULS INTEGRALES

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_2^4 3x dx$ 2) $J = \int_0^1 (2x+3) dx$

3) $K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt$ 4) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta$

Exercice2 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx$ 2) $I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx$

3) $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ 4) $I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt$

5) $I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} t e^{-t^2} dt$ 6) $I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

7) $I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ 8) $I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

9) $I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ 10) $I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$

11) $I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$ 12) $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$

13) $I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx$ 14) $I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx$

15) $I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ 16) $I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx$

17) $I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$ 18) $I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx$

19) $I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$ 20) $I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx$

21) $I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx$

Exercice3 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^3 |x-1| dx$ 2) $J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$

Exercice4 : on pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

1) Calculer $I+J$ et $I-J$

2) en déduire I et J

Exercice5 :

on pose : $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$ et $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$

1) Calculer $I+J$ et $I-3J$

2) en déduire I et J

Exercice6 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$ 2) $I = \int_0^{\ln 3} |2-e^x| dx$

3) $I = \int_0^2 |x^2 - x - 2| dx$

Exercice7 : on pose :

$$A = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) dt \quad \text{et} \quad B = \int_1^e \left(1 + \ln \left(\frac{1}{t} \right) \right) dt$$

Calculer $A+B$

Exercice8 : on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx$ et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$$

1) Calculer $I+J$ et $I-J$

2) en déduire I et J

Exercice9 : on pose : $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ et

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

1) Calculer $K+L$ et $K-L$

2) en déduire K et L

Exercice10 : 1) vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad \frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t}$$

2) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$

Exercice11 : 1)verifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\} \quad \frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}$$

2) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx$

Exercice12 :

Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$

Exercice13 :

1) determiner les réels a et b tels que :

$$\frac{x^3}{x^2+1} = ax + \frac{bx}{x^2+1}$$

2)en déduire l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$

Exercice14 : Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx$$

Exercice15 :on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

1)montrer que : $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ (linéarisation de } \cos^4 x \text{)}$$

2)en déduire l'intégrale I

Exercice16 : Montrer les inégalités suivantes

$$1) \int_1^e \ln x dx \geq 0 \quad 2) \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$$

Exercice17 : Montrer que : $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3}$

Exercice18 :d'application Soit $f : x \rightarrow e^{-x^2}$

Définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $a \geq 1$, on s'intéresse à l'intégrale

$$F(a) = \int_1^a f(x) dx$$

1)Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$:

$$0 \leq f(x) \leq e^{-x}.$$

2) En déduire que pour tout réel $a \geq 1$:

$$0 \leq F(a) \leq e^{-1}.$$

Exercice19 :soit la suite numérique (u_n) définie

$$\text{par : } u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1)Montrer que (u_n) est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 20:soit la suite numérique (u_n)

$$\text{définie par : } u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1)Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0;1] : \frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$$

2) En déduire: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{e^n} \right)$

Exercice 21: on considère la fonction numérique

$$\text{définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

Déterminer La valeur moyenne de f sur $[0; \ln 2]$

Exercice 22: Calculer les intégrales suivantes :

$$1) B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx \quad 2) C = \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1} dx$$

Exercice 23 : Calculer l'intégrale suivante :

$$1) I = \int_0^\pi x \sin x dx \quad 2) J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx \quad 3) K = \int_1^e \ln x dx$$

Exercice24 : En utilisant une intégration par

$$\text{partie calculer : } 1) I = \int_0^1 x e^{2x} dx \quad 2)$$

$$J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{3\sqrt{x^2}} dx$$

$$3) K = \int_0^1 x \sqrt{e^x} dx \quad 3) L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$4) M = \int_1^e (x \ln x) dx \quad 5) N = \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

Exercice25 : En utilisant une intégration par

$$\text{partie calculer : } J = \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx \quad K = \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx$$

$$M = \int_1^e x(1 - \ln x) dx \quad N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$R = \int_1^e x \ln x dx \quad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

Exercice26 : On pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3} dx$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx$$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

$$\text{montrer que : } \frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Exercice 27: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 1cm$

Soit f définie sur $[1;3]$ par : $f(x) = 2x + 1$

1) vérifier que f est continue et positif sur $[1;3]$

2) tracer C_f la courbe représentative de la fonction f sur $[1;3]$

3) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 3$

4) calculer l'intégrale : $I = \int_1^3 f(x) dx$

Que peut-on dire ?

Exercice 28: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 2cm \text{ et Soit } f \text{ définit par : } f(x) = x^2$$

1) tracer C_f la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 2$

Exercice 29: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthogonale avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$

Soit f définit par : $f(x) = x^2 - 2x$

1) tracer C_f la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 3$

Exercice30 :

$(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f définit par : $f(x) = 1 - e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites :

$x = \ln 2$ et $x = \ln 4$

Exercice 31: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 2cm \text{ et Soit } f \text{ définit par : } f(x) = e^x - 3$$

Calculer A la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites :

$x = \ln 3$ et $x = \ln 6$

Exercice 32: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 2cm \text{ et Soit } f \text{ définit par : } f(x) = \ln x - 1$$

Calculer A la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites :

$x = 1$ et $x = e$

Exercice 33: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} \text{ et } g(x) = e^{-x}$$

calculer en cm^2 S la surface du domaine limité par

(C_f) ; (C_g) et les droites $x = 0$ et $x = \ln 2$

Exercice34 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 0.5cm \text{ et Soit } f \text{ définit par : } f(x) = x^2 - 8x + 12$$

et (D) la tangente à la courbe (C_f) au point

$A(3; f(3))$

Calculer A la surface du domaine limité par :

(C_f) et les droites : (D) et $x = 1$ et $x = e$

Exercice35 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 1cm \text{ et Soit } f \text{ définit par : } f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$$

Calculer A la surface du domaine limité par :

C_f et les droites : $y = x - 1$ et $x = 1$ et $x = e$

Exercice36 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ et

$g(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine

limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=1$

Exercice37 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x + x + 1}{e^x + 1}$$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.

2) Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droites:

$x=0$ et $x=1$.

3) Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite $(\Delta) y=x$; la courbe C_f et les droites:

$x=0$ et $x=1$.

Exercice38 : $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré

par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a=0$ et $b=4$

Exercice39 : $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = \frac{2}{3}cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$$
 et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré

par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0;1]$

Exercice40: $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$

et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré

par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1;e]$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et

exercices

Que l'on devient un mathématicien