

Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$a = \int_1^2 (x^2 + 2x + 3) dx \quad ; \quad b = \int_0^1 (x^5 - 6x) dx \quad ; \quad c = \int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} dx \quad ; \quad d = \int_0^1 (x+3)(x^2+6x+1)^3 dx .$$

$$e = \int_0^1 (x^2 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx \quad ; \quad f = \int_{-1}^2 |x^2 - 1| dx \quad ; \quad g = \int_1^2 \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{3x^2 - x^3}} dx \quad ; \quad h = \int_2^3 \frac{|x^2 - 1|}{x^3 - 3x} dx .$$

$$i = \int_{-1}^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \quad ; \quad j = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{|\ln x|}{x} dx \quad ; \quad k = \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \quad ; \quad l = \int_1^2 \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + 2x^2} dx \quad ; \quad m = \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx .$$

$$n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx \quad ; \quad o = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3 dx \quad ; \quad p = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 - \cos x} dx .$$

Exercice 2 :

En utilisant une intégration par parties ; Calculer les intégrales suivantes :

$$a = \int_{\frac{1}{e}}^e \ln x dx \quad ; \quad b = \int_{\sqrt{e}}^e x^5 \ln x dx \quad ; \quad c = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx \quad ; \quad d = \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} dx .$$

$$e = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos 3x dx \quad ; \quad f = \int_0^{\pi} 2x \cos^2(x) dx \quad ; \quad g = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ln(1 + \cos x) dx .$$

Exercice 3 :

On considère les deux intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$.

① - Calculer et I-J.

② - Calculer I + J.

③ - En déduire la valeur de I et J.

Exercice 4 :

On considère les deux intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$.

① - Calculer J.

② - Calculer I-J.

③ - En déduire la valeur de I.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ avec $t \in [1;2]$.

① - Vérifier que : pour tout $1 \leq t \leq x \leq 2$ on a : $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq f(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

② - En déduire que : $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \leq F(x) \leq \frac{x-1}{\sqrt{2}}$. Tel que $F(x)$ est la fonction primitive de la fonction f qui s'annule en 1.

③ - Soit $g(x)$ la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1; x]$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

✍ Exercice 6 :

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

① - Calculer les intégrales : $I = \int_1^e \frac{dx}{x}$ et $J = \int_1^e \ln x dx$.

② - Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

③ - Montrer que : $G(x) = x[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2]$ est une fonction primitive de la fonction $g(x) = (\ln x)^2$.

④ - Soit $t \in]0; 1[$.

a - Calculer les intégrales : $A = \int_t^1 \left(\frac{\ln x}{x} \right) dx$ et $B = \int_t^1 (\ln x)^2 dx$.

b - Calculer en fonction de t le volume $V(t)$ du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[t; 1]$.

c - Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t)$.

✍ Exercice 7 :

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \int_1^e x (\ln x)^{n+1} dx$ et $u_0 = \int_1^e x \ln x dx$.

① - En utilisant une intégration par partie, Calculer u_0 .

② - En utilisant une intégration par partie, Calculer u_1 .

③ - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \geq 0$.

④ - Montrer que (u_n) est une suite décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

⑤ - En utilisant une intégration par partie,

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 2u_{n+1} + (n+2)u_n = e^2$

⑥ - a - Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.

b - En déduire la limite de la suite (u_n) .