



1.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_4^9 (5x+8)dx$ et $\int_0^1 (2x+3)^4 dx$ et $\int_0^1 x(4x^2+2)^3 dx$

2. $\int_1^5 |x-2| dx$ et $\int_0^2 |(x-1)(x-3)| dx$ et $\int_0^\pi |\cos x| dx$

3. $\int_1^3 -\frac{1}{x^2} dx$ et $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ et $\int_1^3 \frac{1}{x+2} dx$ et $\int_2^3 \frac{2x+2}{x^2+2x} dx$

4. $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ et $\int_1^2 \sqrt[4]{x} dx$ et $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$

5. ..

a. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin(5x) dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2 \sin(3x) + 5 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx$ et $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{(2 + \cos t)^2} dt$

b. $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos 2x dx$ et $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos^4 x dx$ et $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx$ (remarquer $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cos x$)

6. $\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x} dx$ et $\int_1^e \frac{1}{x} (1 + \ln x) dx$ et $A = \int_1^{e-1} \frac{1}{(1+x) \ln^2(x+1)} dx$

7. $\int_0^1 e^{-x} dx$ et $\int_0^1 e^{5x} dx$ et $\int_0^1 e^x (e^{-4x} + e^{2x}) dx$ (bac2016) et $\int_0^{\ln(2)} \frac{3e^x}{e^x + 2} dx$ et $\int_{-1}^1 x e^{x^2} dx$ et

$A = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{5x} + 2e^x - 2}{e^x} dx$

2.

Déterminer le réel $\lambda > -3$ tel que : $\int_0^\lambda (x+3) dx = -4$.

3.

1. Déterminer $f(c)$ la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I pour chaque suivant :

a. $I = [1, 3]$ et $f(x) = x+1$ puis donner interprétation géométrique du nombre $2 \times f(c)$

b. $I = [-1, 2]$ et $f(x) = x^3 + 2x$ puis donner interprétation géométrique du nombre $3 \times f(c)$

4.

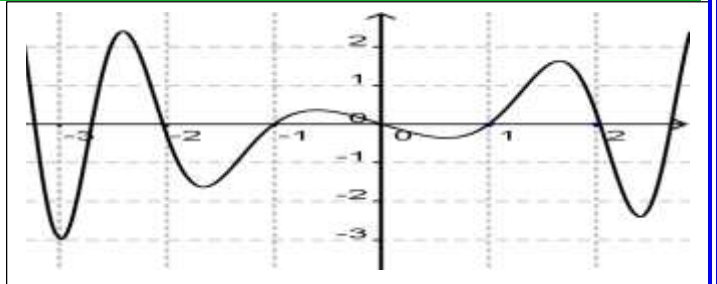
La figure suivante représente la courbe représentative d'une fonction définie et paire sur intervalle I .

1. Déterminer le signe de chaque intégrale suivante

$A_1 = \int_{-2}^{-1} f(x) dx$ et $A_2 = \int_{-1}^0 f(x) dx$

$A_3 = \int_0^1 f(x) dx$ et $A_4 = \int_1^2 f(x) dx$

2. Donner la valeur de l'intégrale : $A_5 = \int_{-1}^1 f(x) dx$





5.

1. Calculer chaque intégrale suivante en utilisant une intégration par parties :

a. $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) dx$, puis en déduire une fonction primitive de la fonction $f(x) = x \cos(2x)$

b. $B = \int_1^e \ln(x) dx$, puis en déduire une fonction primitive de la fonction $f(x) = \ln(x)$

c. $C = \int_0^1 x e^x dx$, , puis en déduire une fonction primitive de la fonction $f(x) = x e^x$

2. Calculer chaque intégrale suivante en utilisant une double intégration par parties :

a. $E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$.

b. $F = \int_1^e \ln^2(x) dx$.

c. $G = \int_0^1 x^2 e^x dx$.

6.

1. Vérifier que : $H : x \mapsto \frac{2}{3} \sqrt{3x+1}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{3x+1}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale suivante : $\int_0^1 \sqrt{3x+1} dx$.

7.

1. Déterminer a et b de $\mathbb{R}$ tel que : $\frac{5x+2}{x-6} = a + \frac{b}{x-6}$ (avec $x \neq 6$)

2. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_1^3 \frac{5x+2}{x-6} dx$.

8.

A l'aide d'une intégration par parties calculer :

1. $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos 3x dx$.

2. $B = \int_1^{\lambda} \ln(x-2) dx$ tel que : $\lambda > 2$.

9.

On pose : $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$ et $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$.

1. Calculer les intégrales suivantes : $I + J$ puis $I - 3J$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale : I et J .

10.

On pose : $I = \int_0^1 \frac{4x^4}{x^5 + 4} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^9}{x^5 + 4} dx$.



1. Calculer la valeur de l'intégrale I puis I + J .

2. En déduire la valeur de l'intégrale J .

11.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que : $\forall t \in [0;1] : \frac{t}{2} \leq \frac{t}{1+t^2} \leq t$.

2. En déduire un encadrement de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt$ puis $\ln 2$.

12.

1. Donner une linéarisation de : $f(x) = \sin^2 x$ puis en déduire une fonction primitive de f .

2. Calculer : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$.

3. Calculer : $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$.

13.

1. Ecrire la fonction suivante $g(x) = x\sqrt{x^2+1}$ sous la forme $af'(x)f(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et f est une fonction convenable à choisir .

2. Calculer : $\int_{-1}^1 x\sqrt{x^2+1} dx$.

14.

1. Ecrire la fonction suivante $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sous la forme $af'(x)f(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et f est une fonction convenable à choisir .

2. Calculer : $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

15.

On considère les deux intégrales suivantes : $A = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$ et $B = \int_0^{\ln 2} e^x \ln(e^x+1) dx$.

1. ..

a. Vérifier que : $e^x - 1 + \frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$.

b. Donner la fonction dérivée de la fonction : $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right)$.

2. ..

a. Calculer l'intégrale A .

b. A l'aide d'une intégration par parties , calculer B

16.



1. Déterminer les réels a et b tel que : $\frac{x-2}{x+4} = a + \frac{b}{x+4}$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

2. Calculer : $\int_{-1}^1 \frac{x-2}{x+4} dx$.

17.

1. Vérifier que : $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$.

3. A l'aide d'une intégration par parties calculer : $A = \int_0^1 x \ln(x+1) dx$.

18.

1. Vérifier que : $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

2. Calculer les intégrales suivantes : $A = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx$ et $B = \int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ et $C = \int_1^2 \frac{x}{x(x^2+1)} dx$.

3. A l'aide d'une intégration par parties calculer : $D = \int_1^2 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$.

19.

1. Vérifier que : $\frac{2x^2+3x+2}{x+1} = 2x+1 + \frac{1}{x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale suivante : $A = \int_0^1 \frac{2x^2+3x+2}{x+1} dx$.

3. A l'aide d'une intégration par parties calculer : $B = \int_0^1 x e^{-x} dx$.

4. Calculer les intégrales suivantes : $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$ et $\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$

20.

1. ..

a. Développer : $x(x-2)(+2)$.

b. Déterminer les réels a et b et c tel que : $\frac{3x+1}{x^3-4x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}$.

2. Calculer : $\int_1^3 \frac{3x+1}{x^3-4x} dx$.

21.

1. Calculer : $A = \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{2e^x - 3}{e^x + 2e^{-x} - 3} dx$ et $B = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ et



2. A l'aide d'une intégration par parties ,montrer que : $\int_1^0 \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi-2}{8}$.

22.

1. Montrer que : $\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} = e^{-x} - 1 + \frac{e^x}{1+e^x}$.

2. Calculer : l'intégrale : $A = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx$.

3. A l'aide d'une intégration par parties calculer : $B = \int_0^{\ln 2} e^{-x} \ln(1+e^{-x}) dx$.

23.

1. Calculer les intégrales suivantes : $A = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$ et $B = \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$.

2. ..

a. Vérifier que $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}$, avec $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

b. Calculer l'intégrale suivante : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$.

3. A l'aide d'une double intégration par parties calculer : $A = \int_1^e \cos(\pi \ln x) dx$

24.

On considère les deux intégrales suivantes : $A = \int_0^{e^\pi} \sin(\ln x) dx$ et $B = \int_0^{e^\pi} \cos(\ln x) dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties , montrer que : $A = -B$ (on pourra poser $u(x) = \sin(\ln x)$ et $v'(x) = 1$.

2. ..

a. A l'aide d'une intégration par parties , montrer que : $B = -e^\pi - 1 + A$.

b. En déduire les valeurs de A et B .

25.

1. ..

a. Calculer la fonction dérivée de $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$.

b. Montrer que : $A = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

2. ..

a. On pose $B = \int_0^2 \sqrt{x^2 + 2} dx$ et $C = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$. Montrer que : $2A = B - C$

b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $B + C = 2\sqrt{6}$.



c. En déduire les valeurs de A et B.

26.

1. ..

a. Linéariser : $\sin^3 x$, en déduire que $\sin^3 x = \frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin x$.

b. Calculer l'intégrale suivante : $A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin^3 x dx$

2. On pose : $B = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos^3 x dx$

a. Calculer : $A + B$

b. En déduire la valeur de B.

3. On considère l'équation différentielle : (E) : $y' + 2y + 1 = 0$

4. déterminer la solution g de l'équation (E) qui vérifie : $2 \int_0^{\ln 2} g(x) dx = 3 + \ln 2$.

27.

On considère $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite numérique définie par $u_0 = \int_1^e x \ln x dx$ et $u_n = \int_1^e x (\ln x)^{n+1} dx$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1. A l'aide d'une intégration par parties calculer u_0

2. A l'aide d'une intégration par parties calculer u_1 .

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$.

4. ..

a. Montrer que : la suite (u_n) est décroissante.

b. En déduire que : la suite (u_n) est convergente.

5. ..

a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $2u_{n+1} + (n+2)u_n = e^2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b. En déduire la valeur u_2 .

6. ..

a. Montrer que : $u_n \leq \frac{e^2}{n+2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b. En déduire la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

28.

On pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

1. A l'aide d'une intégration par parties calculer : I_1 .

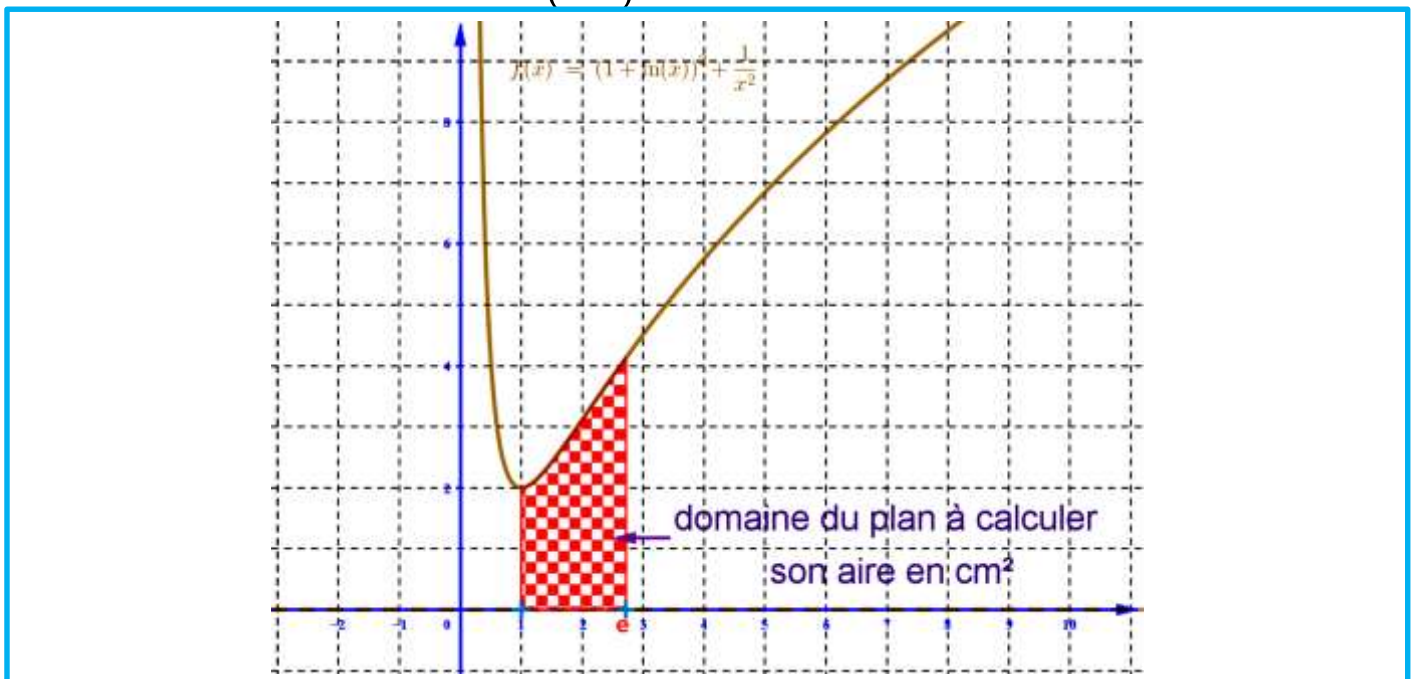
2. ..



- a.** Montrer que : $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
- b.** En déduire les valeurs de I_2 et I_3 .
- c.** Calculer : l'intégrale suivante $I_n = \int_0^1 (2x^3 - 4x^2) e^{-x} dx$.
- 3.** On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- a.** Montrer que : la suite (I_n) est décroissante.
- b.** Montrer que : la suite (I_n) est minorée par 0.
- c.** En déduire que : la suite (I_n) est convergente.
- 4.** ..Montrer que : $I_n \leq \frac{1}{n+1}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$. En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

29. Bac 2014 session normale

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm).



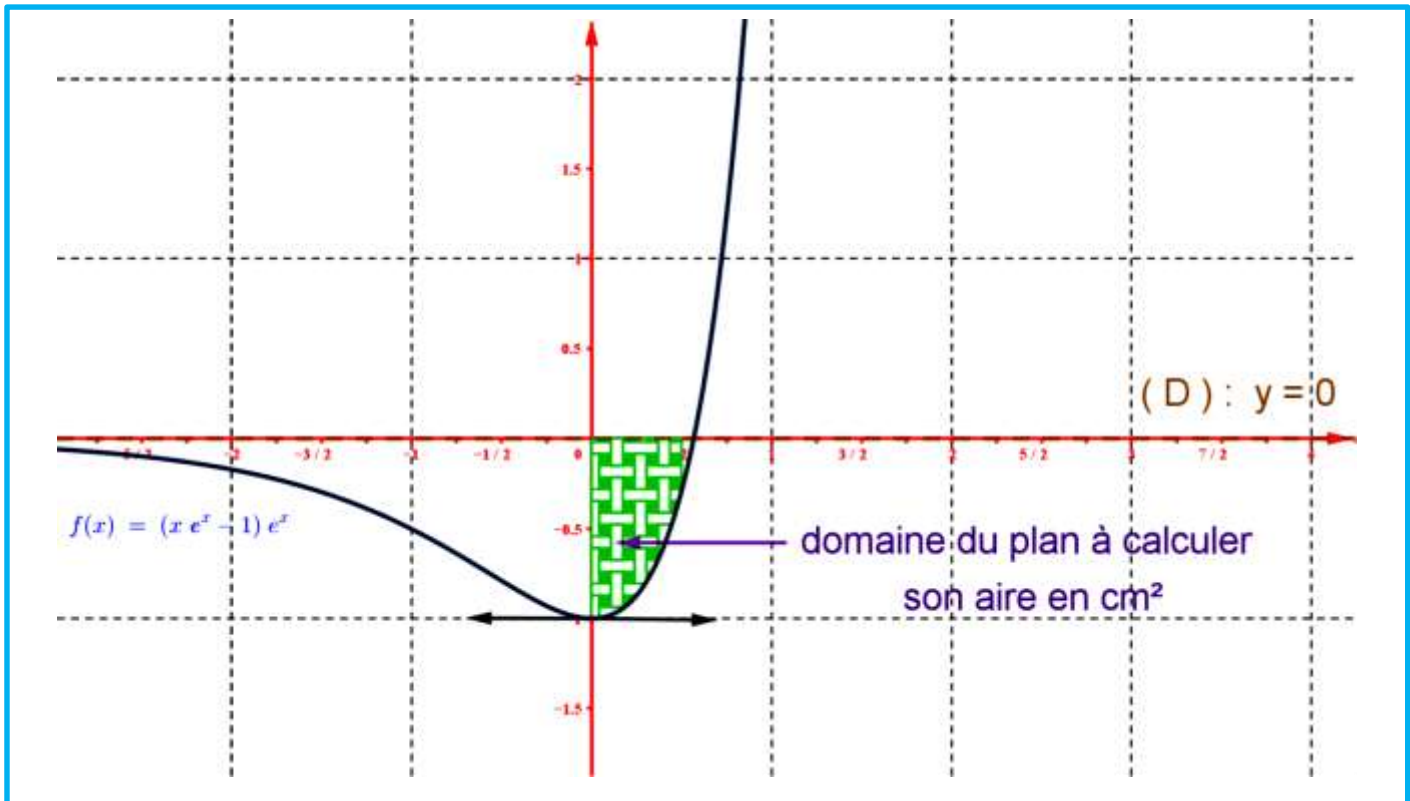
- 1.** On considère les deux intégrales suivantes : $I = \int_1^e (1 + \ln x) dx$ et $J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$.
- a.** Montrer que $H : x \mapsto x \ln x$ est une primitive de la fonction $h \mapsto 1 + \ln x$ sur $]0, +\infty[$ puis en déduire que $I = e$ (0,5)
- b.** A l'aide d'une intégration par parties montrer que $J = 2e - 1$ (0,5)
- c.** Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ (0,5)

30. Bac 2014 session de rattrapage



On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (xe^x - 1)e^x$.

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 2 cm).



1. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx = \frac{1}{4}$ (0,75)

2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites

d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ (1)

31. Session 2015 session normale (الذي تم تسريبه)

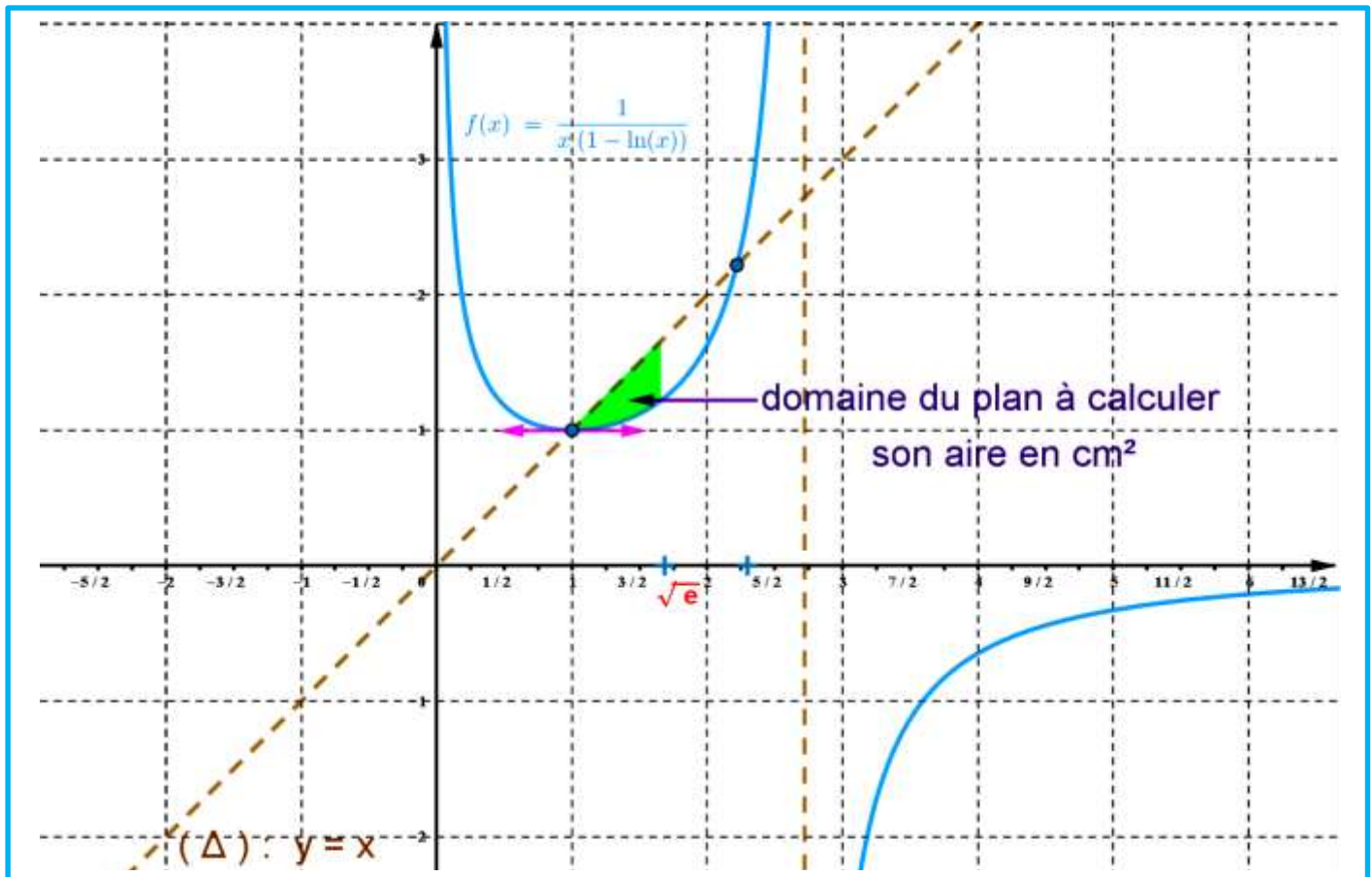
On considère la fonction numérique f définie sur $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$,

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 2 cm). (voir la figure après les questions)

1.

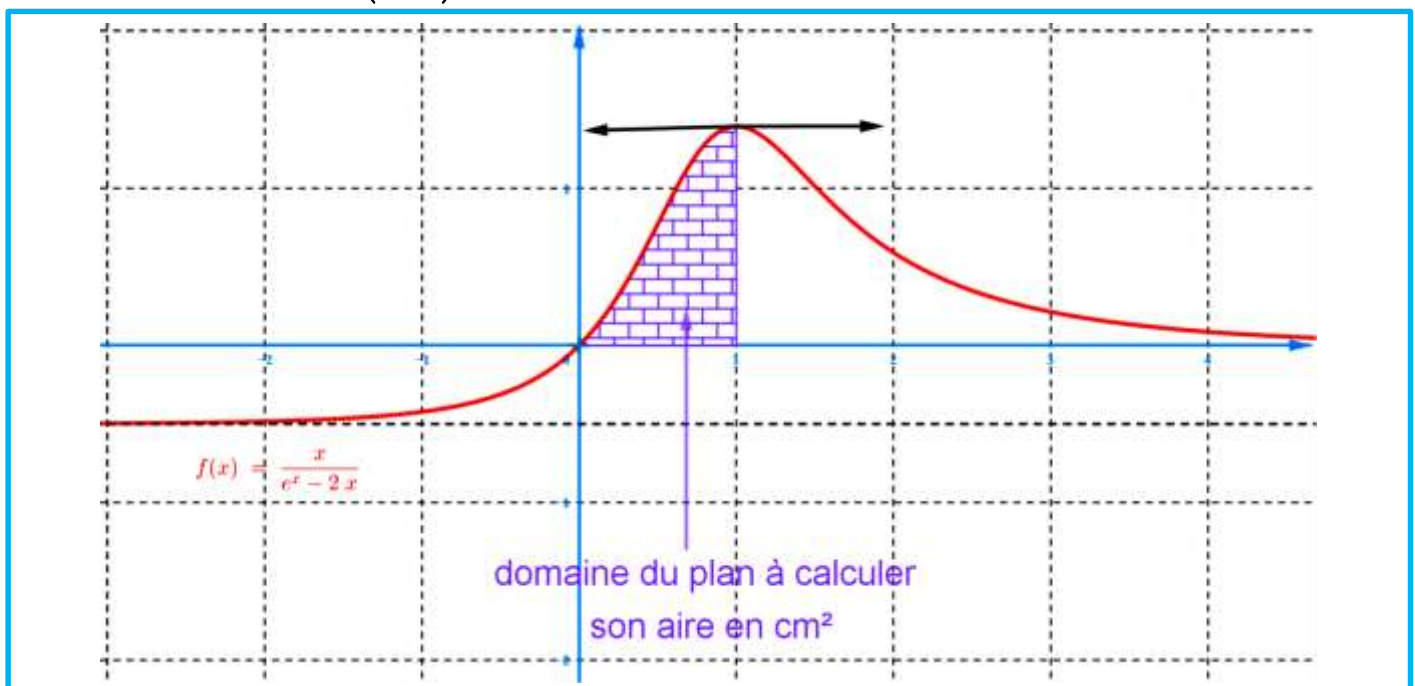
a. Montrer que : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx = \ln 2$ (on remarque $\frac{1}{x(1 - \ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \ln x}$ pour tout x de D_f).
..... (0,75)

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$ (0,75)



32. Bac 2015 session normale (sujet qui a été refait)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm). (voir la figure après les questions)





1. ..

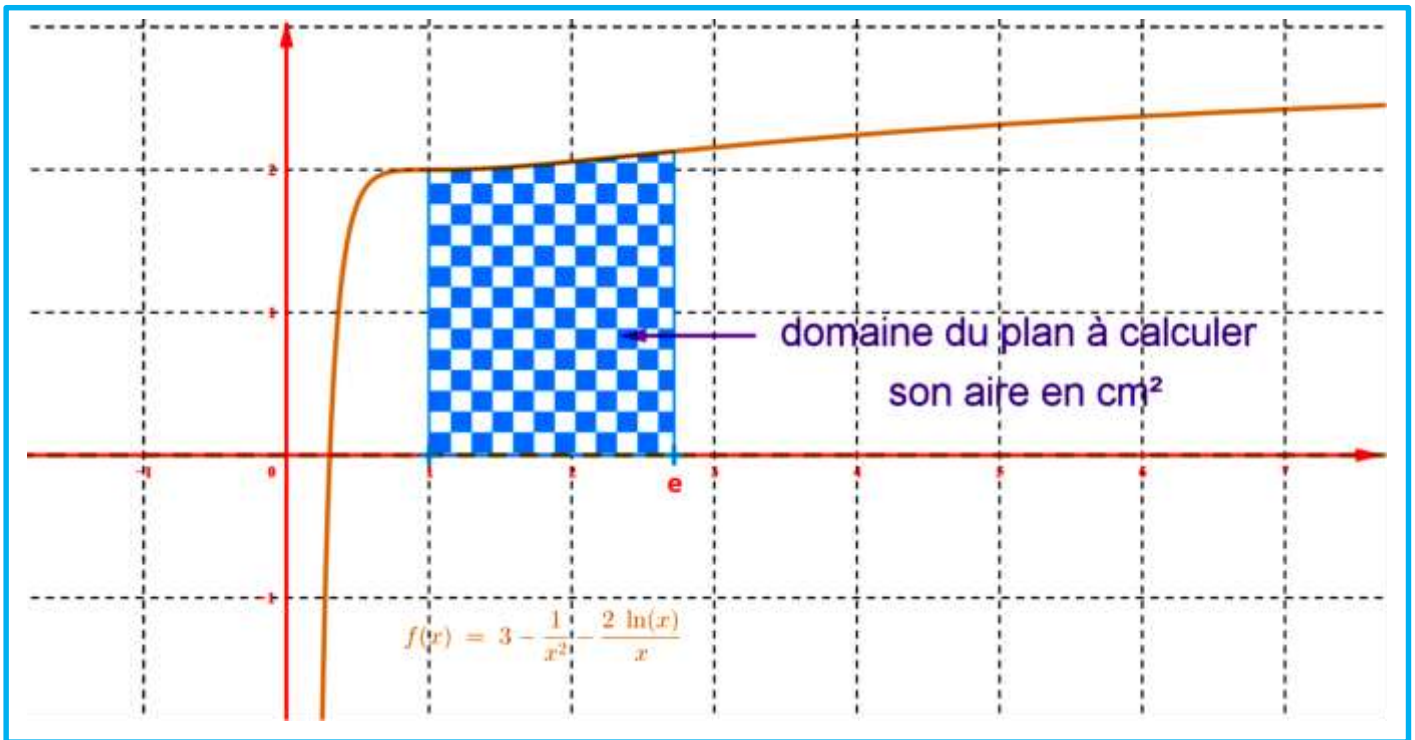
a. Montrer que : $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$ pour tout x de $[0, +\infty[$ (0,75)

b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$ (0,75)

c. Soit en cm^2 $A(E)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. montrer que $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$ (0,75)

33. Bac 2015 session de rattrapage

On considère la fonction numérique f définie sur $D =]0, +\infty[$ par : $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 2 cm) .



1. ..

a. Montrer que : $\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = 1$ (0,5)

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ (0,75)

34. Bac 2016 session normale

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$.

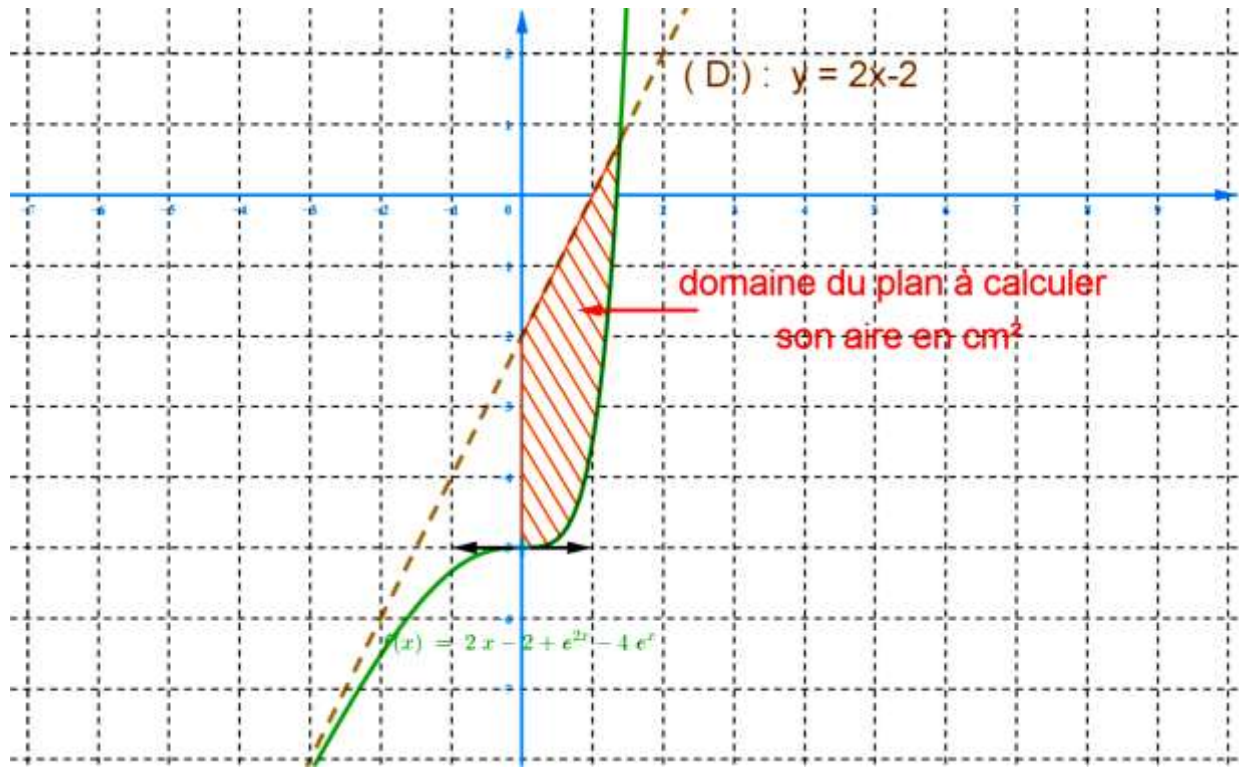
et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm)

1. ..

a. Montrer que : $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$ (0,5)

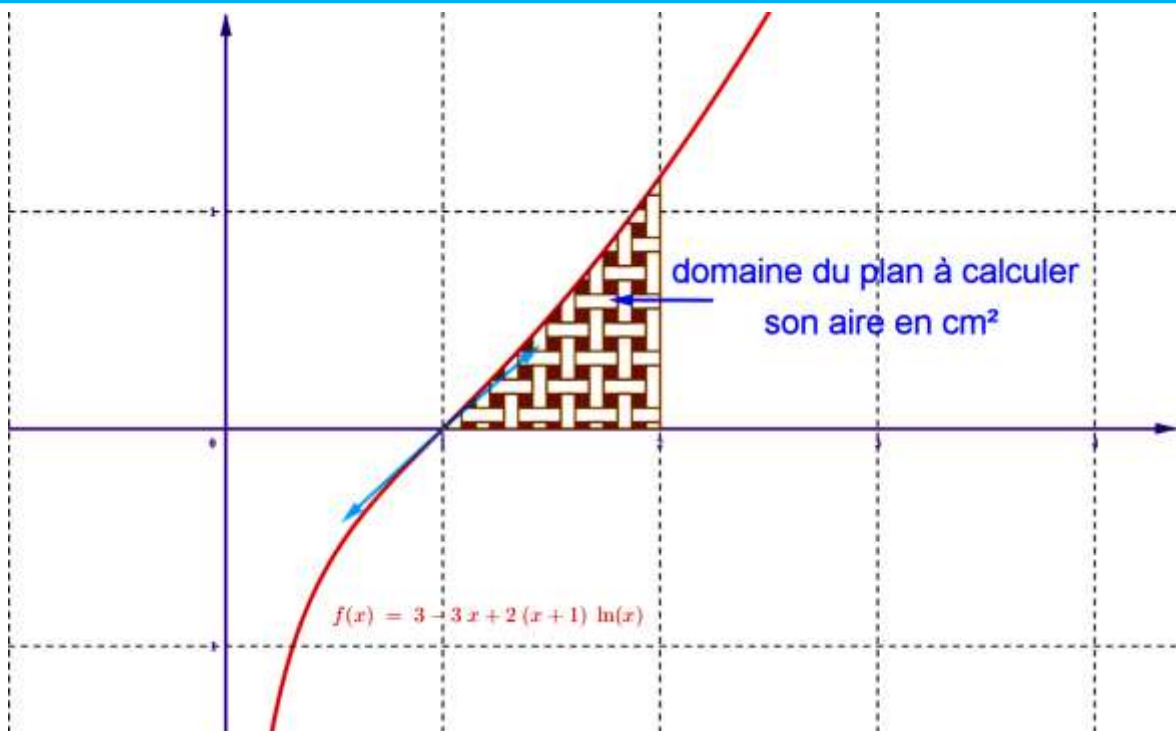


- b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ et l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$.



35. Bac 2016 session de rattrapage

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 2 cm). (voir la figure après les questions)





1. ..

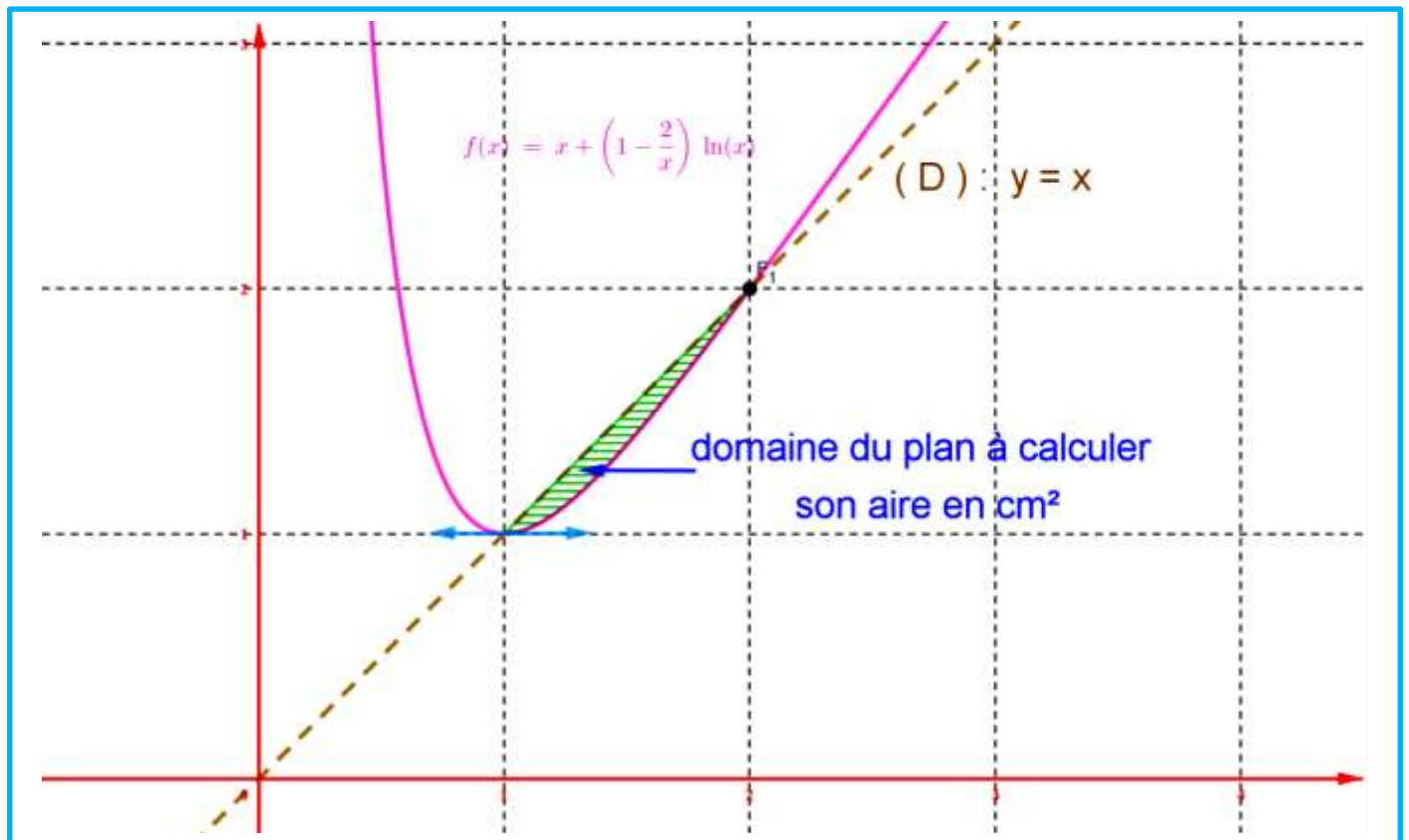
a. Montrer que : $\int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx = \frac{7}{4}$ (0,5)

b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_1^2 (x+1) \ln x dx = 4 \ln 2 - \frac{7}{4}$ (0,75)

c. calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$ (0,5)

36. Bac 2017 session normale

On considère la fonction numérique f définie sur $D =]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm).



1. ..

a. Montrer que : $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$ (0,5)

b. Montrer que : $H : x \mapsto 2 \ln x - x$ est fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (0,25)

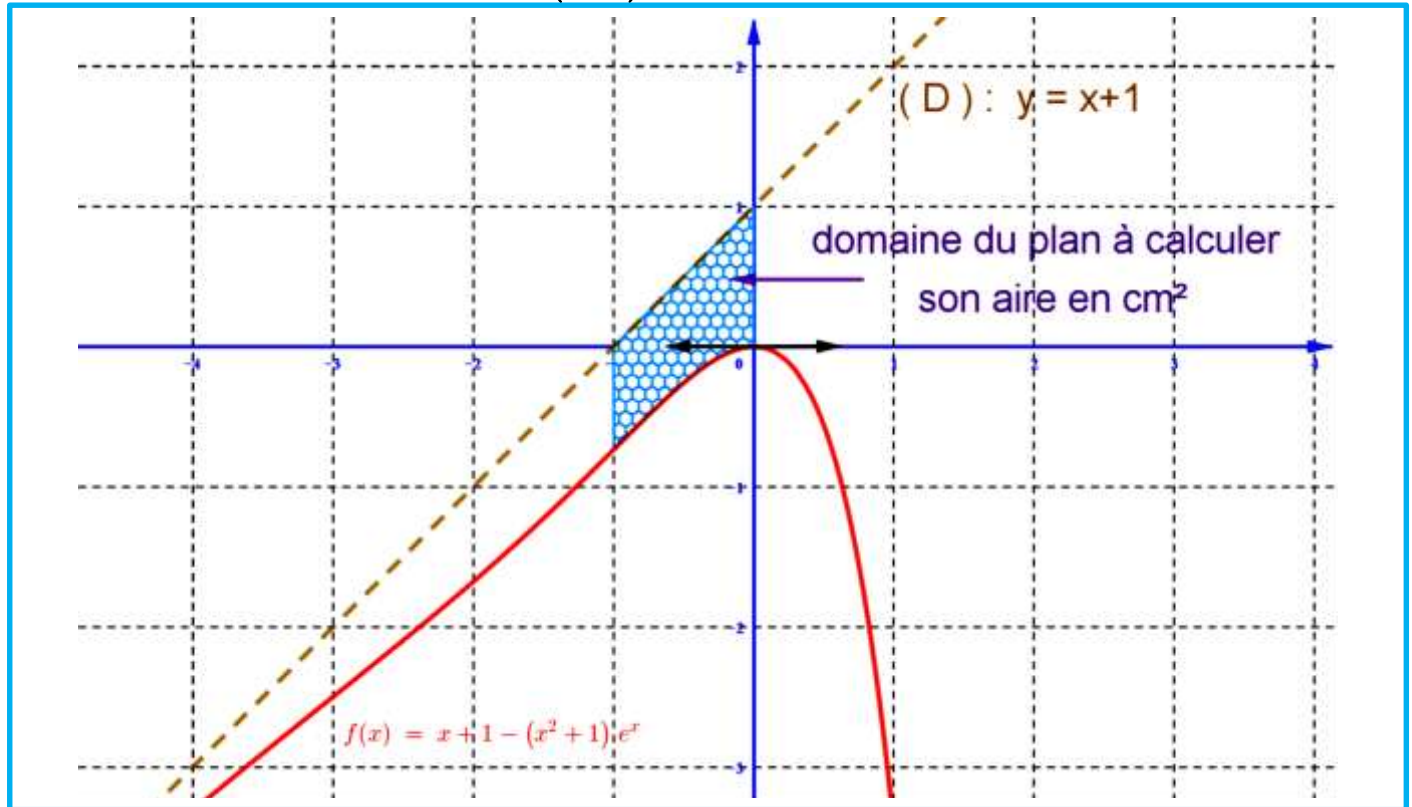
c. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2$ (0,5)



- d. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ (0,5)

37. Bac 2017 session de rattrapage

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 2 cm).



1. ..

- a. Vérifier que : $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$. puis montrer que $\int_{-1}^0 xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$ (0,5)
- b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx = 3 \left(1 - \frac{2}{e} \right)$ (0,75)
- c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des ordonnées et la droite (D) d'équation $y = x + 1$ et la droite d'équation $x = -1$ (0,5)

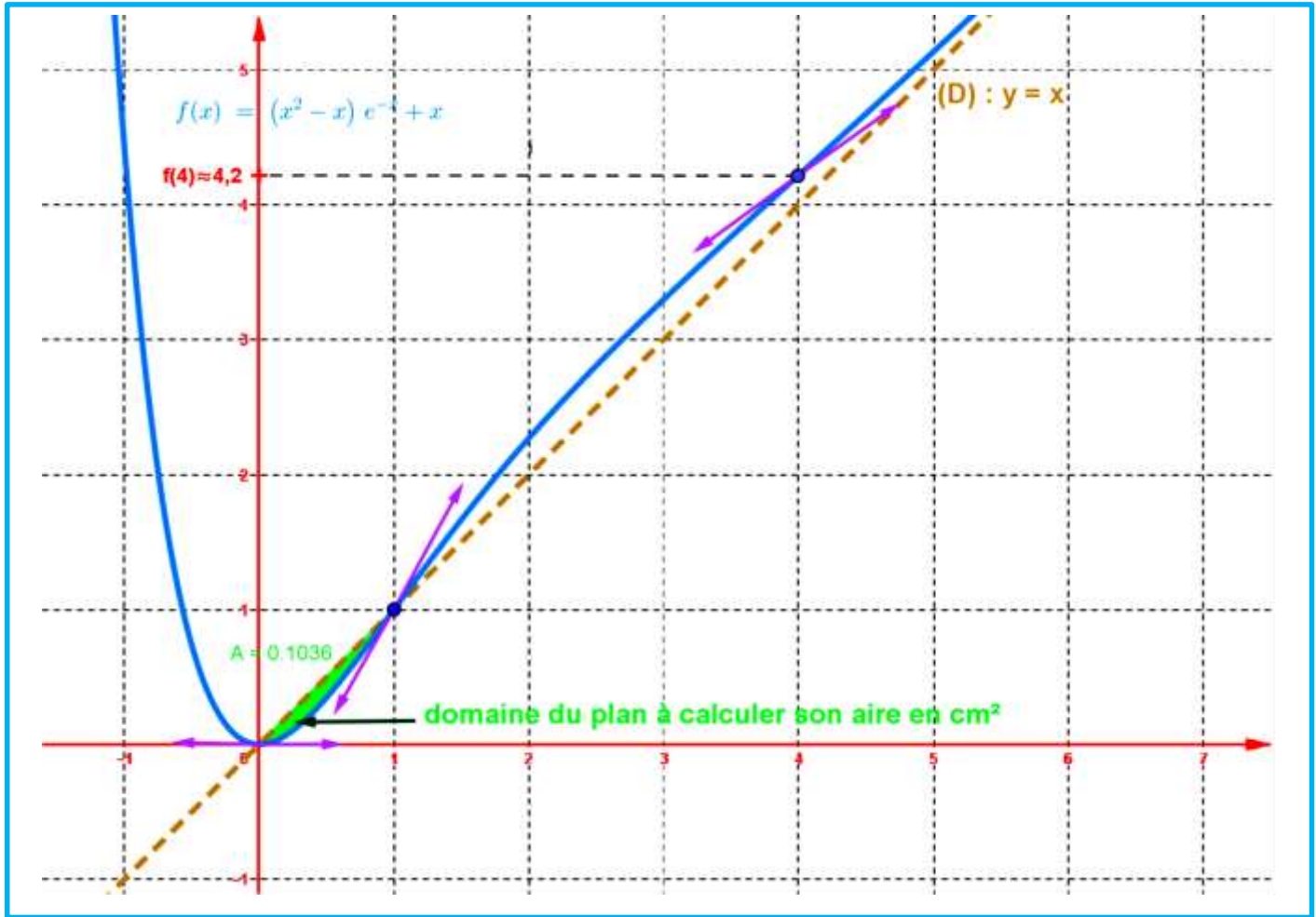
38. Bac 2018 session normale

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm).

1.



- a.** Vérifier que : $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$. puis en déduire que $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$ (0,5)
- b.** A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$ (0,75)
- c.** Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (D) et le droite (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ (0,75)



39. Bac 2018 session de rattrapage (pas de questions sur calcul d'aire)

- 1.** (0,5 + 0,5)
- a.** Montrer que : la fonction $H : x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$
- b.** En déduire que $\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$.
- 2.** En utilisant une intégration par parties ; calculer $\int_0^1 (x^2 + 2x - 1)e^x dx$ (1)

40. Bac 2019 session normale



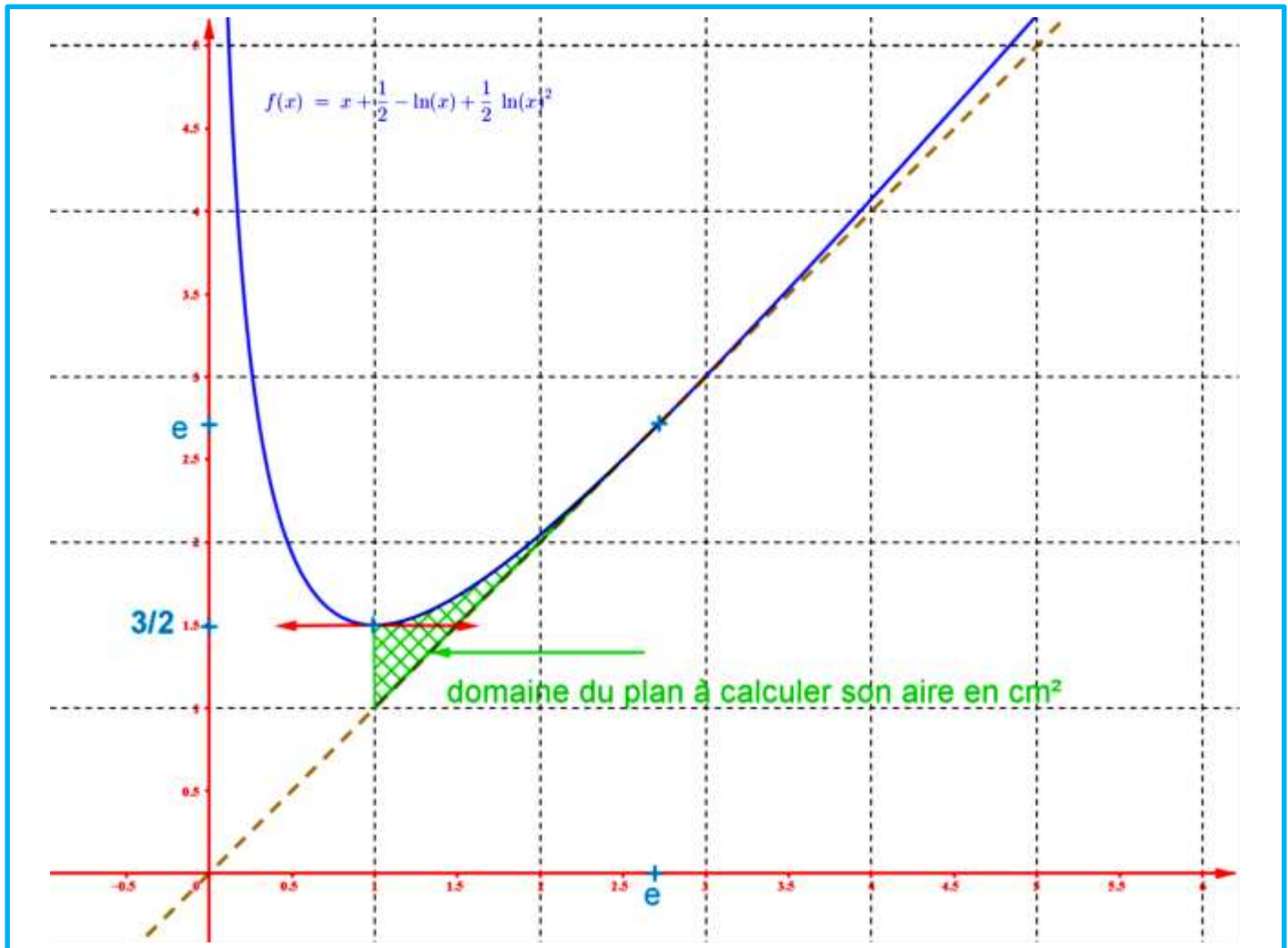
On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm).

(voir la figure après les questions)

1. ..

- Vérifier que : $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (0,5)
- A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ (0,75)
- Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ (0,5)



41. Bac 2019 session de rattrapage

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + 8 \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 e^{x-4}$.

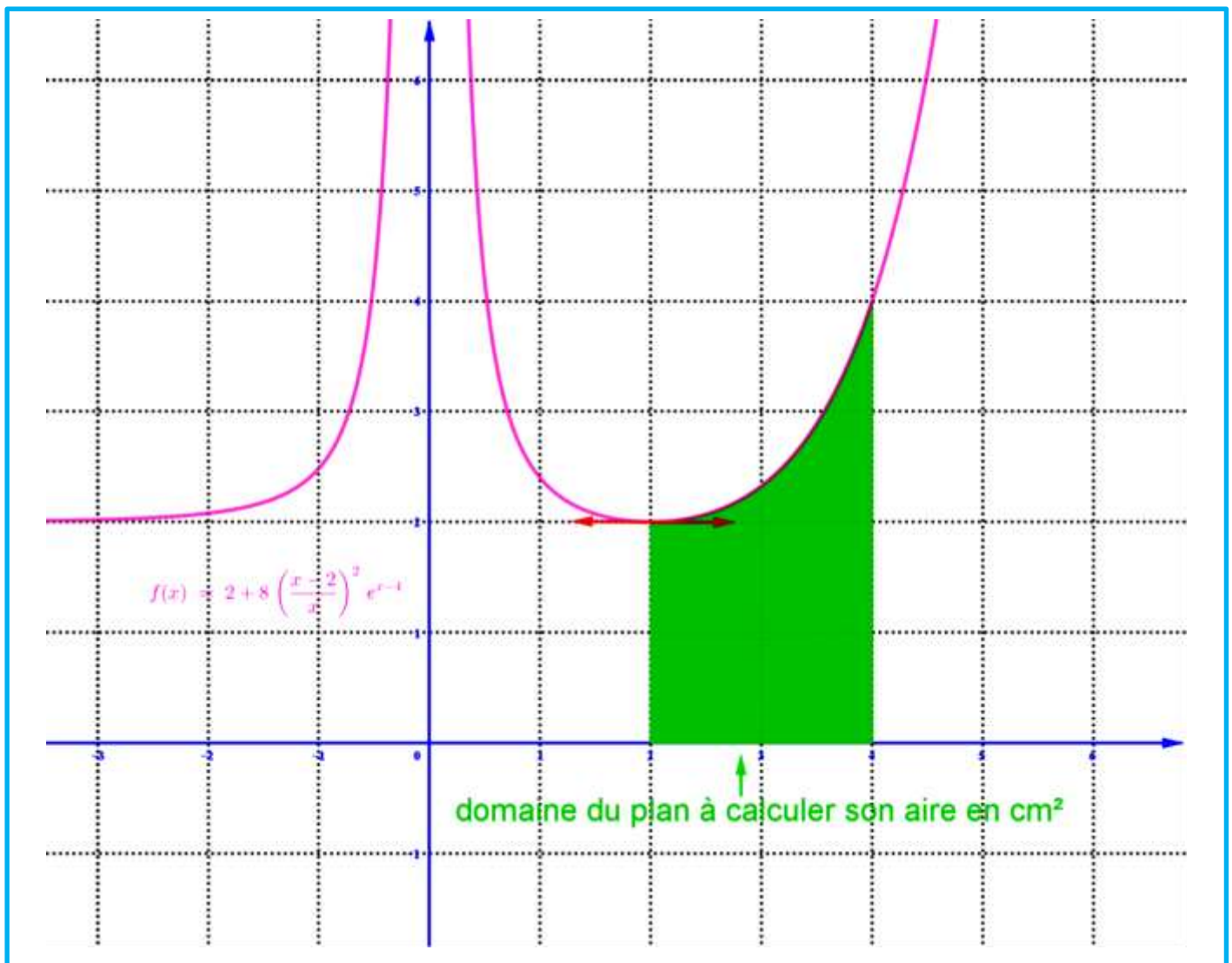
et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm).



(voir la figure à la fin des questions)

1. ..

- a. Vérifier que : $H : x \mapsto \frac{1}{x} e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{x-1}{x^2} e^{x-4}$ sur l'intervalle $[2,4]$ (0,5)
- b. Vérifier que : $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32 \frac{(x-1)}{x^2} e^{x-4}$ (0,25)
- c. Calculer l'intégral : $\int_2^4 e^{x-4} dx$ (0,5)
- d. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=4$ (0,75)



42.

On considère (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$ pour tout n de $\mathbb{N}$.



1. ..

a. Montrer que : $u_0 + u_1 = 1$.

b. Calculer u_1 , puis en déduire u_0 .

2. Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

3. ..

a. Montrer que : $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. En déduire que : $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

43.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (l'unité est 1 cm) ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$)

❖ On considère f la fonction numérique définie sur $I [0, h]$ par $f(x) = r$.

❖ Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

❖ Soit (S) le solide obtenu par la rotation de la courbe (C_f) sur I au tour de l'axe des abscisses de 360° .

Exercice n° 1 :

$I = [0, h]$ par $f(x) = r$ et h et r sont deux réels strictement positifs donnés.

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (voir figure)

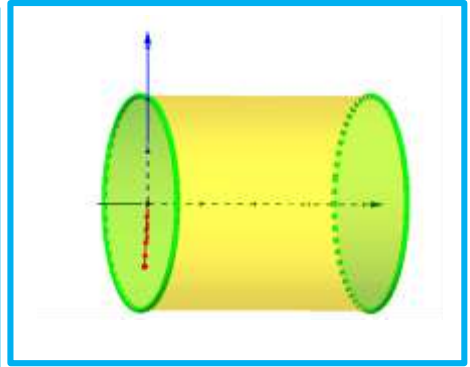
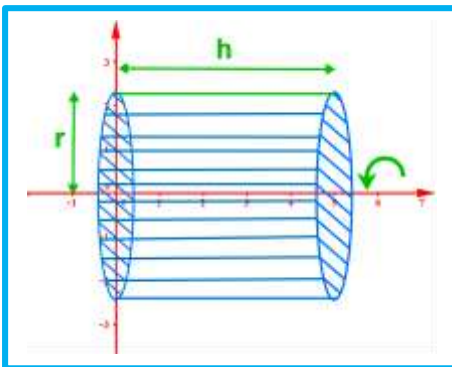
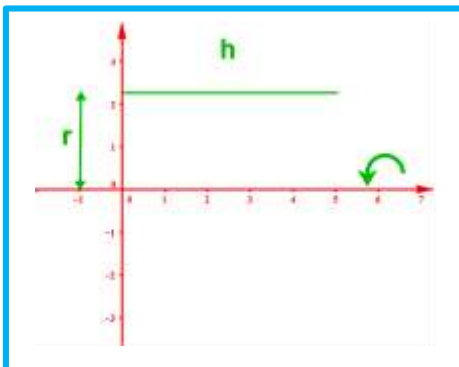
1. Construire le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $I = [-r, r]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .

2. On calcule en unité de volume (u.v) le volume V du solide de révolution obtenue par la rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0, h]$.

3. Que représente pour-vous le résultat obtenu ?

Solution

1. On construit Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $I = [0, h]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .



2. On calcule V le volume du solide de révolution obtenu :



On a : $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$ (unité de volume)

$$= \int_0^h \pi r^2 dx \times 1 \times 1 \text{ (u.v)}$$

$$= \pi \int_0^h r^2 dx \text{ (u.v)}$$

$$= \pi [r^2 x]_0^h \text{ (u.v) (r est un constant)}$$

$$= \pi r^2 [(h) - 0] \text{ (u.v)}$$

$$= \pi r^2 h \text{ (u.v)}$$

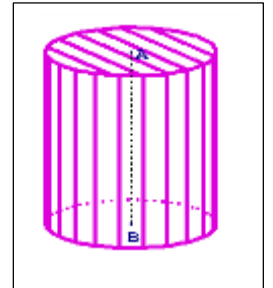
Conclusion : le volume du solide de révolution est : $V = \pi \times r^2 h \text{ u.v.}$

3. le rayon et la hauteur sont exprimés

4. le résultat obtenu nous rappelle de la formule du volume d'un cylindre dont la base est de rayon r et de hauteur h qu'on a étudié à l'école
(حجم أسطوانة شعاع قاعدته و ارتفاعه الذي درسناها في المدرسة).

5. Remarque :

- Si le rayon et la hauteur sont exprimés en cm le volume est $V = \pi \times r^2 h \text{ cm}^3$
- Le volume d'une boule ou d'une sphère de rayon r est $V = \pi r^2 h \text{ u.v}$ (unité de volume)



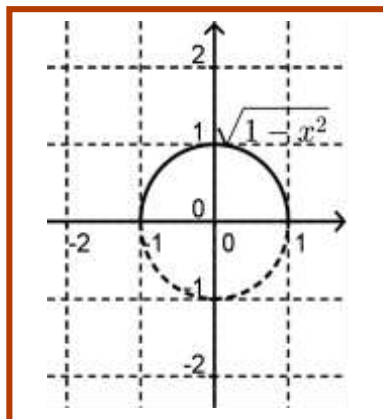
Exercice n° 2 :

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ sur $I = [-r, r]$, r est un réel strictement positif donné. (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$

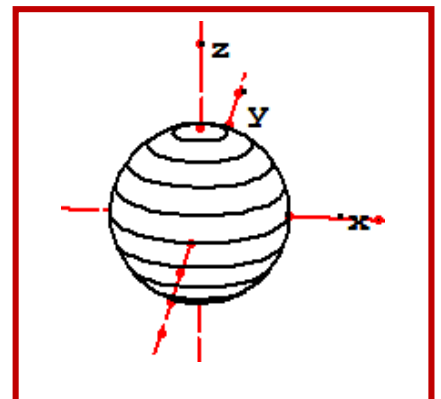
- Construire le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $I = [-r, r]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .
- Calculer en unité de volume (u.v) le volume V du solide de révolution obtenue par la rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0, h]$.
- représente pour-vous le résultat obtenu ?

Solution :

- On construit Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $I = [-r, r]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .



Après la rotation de la courbe (C_f)





2. On calcule V le volume du solide de révolution obtenu :

On a : $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$ (unité de volume)

$$V = \int_{-r}^r \pi \sqrt{r^2 - x^2}^2 dx \times 1 \times 1 \quad (u.v)$$

$$= \int_{-r}^r \pi (r^2 - x^2) dx \times 1 \times 1 \quad (u.v)$$

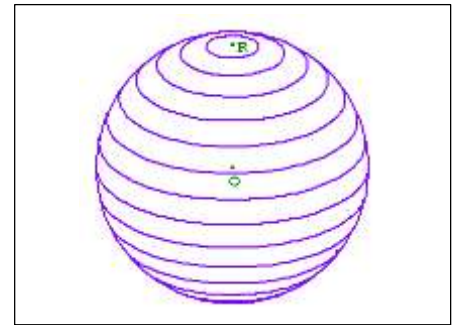
$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r \quad (u.v)$$

$$= \pi \left[\left(r^2 \times r - \frac{1}{3} r^3 \right) - \left(r^2 \times (-r) - \frac{1}{3} (-r)^3 \right) \right] \quad (u.v)$$

$$= \pi \left[\left(\frac{2}{3} r^3 \right) - \left(-\frac{2}{3} r^3 \right) \right] \quad (u.v)$$

$$= \pi \times \frac{4}{3} r^3 \quad (u.v)$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (u.v)$$



Conclusion : le volume du solide de révolution est : $V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad u.v$.

3. le résultat obtenu nous rappelle de la formule du volume d'une boule étudiée à l'école (حجم كرة الذي درسناها في المدرسة الابتدائية).

4. Remarque :

- Si le rayon est exprimé en cm le volume est $V = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ cm}^3$
- Le volume d'une boule ou d'une sphère de rayon r est $V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad u.v$ (unité de volume)

Exercice n° 3 :

On considère la fonction $f(x) = \frac{r}{h} x$ sur $I = [0, h]$, r et h sont deux réels strictement positifs donnés.

(C_f) sa courbe représentative dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

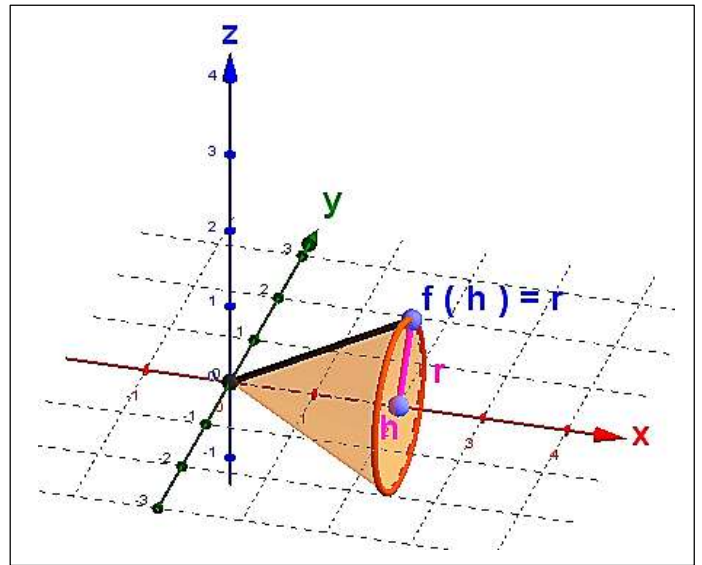
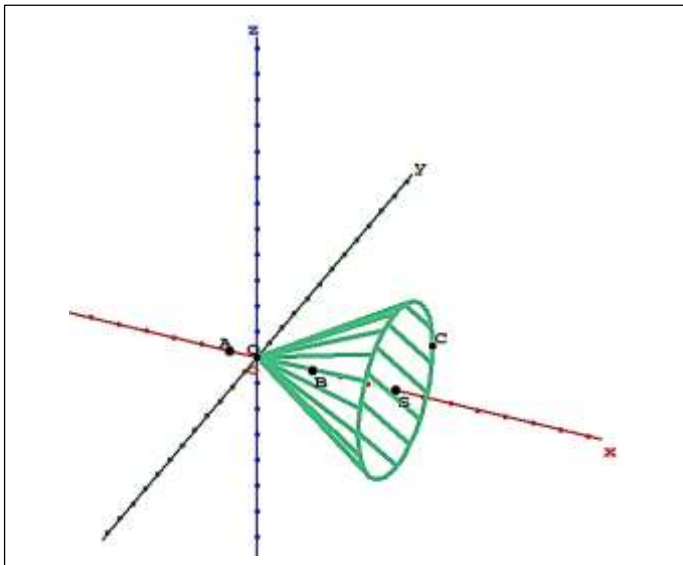
1. Construire le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $I = [0, h]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .

2. On calcule en unité de volume (u.v) le volume V du solide de révolution obtenue par la rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0, h]$.

3. Que représente pour-vous le résultat obtenu ?

Solution :

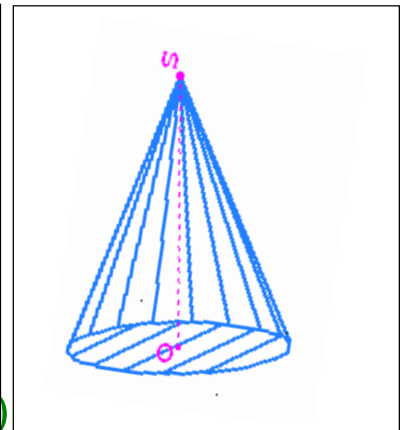
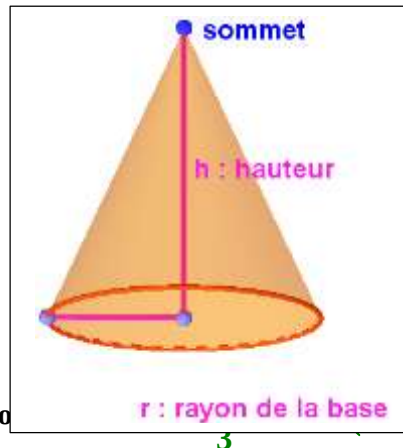
1. On construit le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $I = [0, h]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .



2. On calcule V le volume du solide de révolution obtenu :

On a : $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$ (unité de volume)

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx \times 1 \times 1 \times 1 \text{ (u.v)} \\ &= \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx \text{ (u.v)} \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx \text{ (u.v)} \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^h = \frac{1}{3} r^2 \times h \pi \text{ (u.v)} \end{aligned}$$



Conclusion : le volume du solide de révolution

3. le résultat obtenu nous rappelle de la formule du volume d'un cône de révolution étudié à l'école (حجم مخروط الدوراني الذي درسناها في المدرسة).

Exercice n° 3 :

On considère la fonction $f(x) = x - 5$ sur $[-1, 2]$, (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1. Construire le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $[-1, 2]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .

2. On calcule en unité de volume (u.v) le volume V du solide de révolution obtenue par la rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses sur l'intervalle Que représente pour-vous le résultat obtenu ?

Solution :

1. On construit Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $[a, b]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .

2. On calcule V le volume du solide de révolution obtenu :



On a : $V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$ (unité de volume)

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^2 \pi(x-5)^2 dx \times 1 \times 1 \times 1 = \pi \int_{-1}^2 (x-5)^2 dx \text{ cm}^3 \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} (x-5)^3 \right]_{-1}^2 \text{ cm}^3 \\ &= \frac{\pi}{3} \left((-3)^3 - (-6)^3 \right) = \frac{\pi}{3} (-3^3 + 6^3) = 63\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Conclusion : le volume du solide de révolution est $V = 63\pi \text{ cm}^3$.

Exercice n° 4 :

On considère la fonction numérique f définie sur $D_f =]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{x}(1 + \ln x),$$

Soit le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm). (voir la figure après les questions)

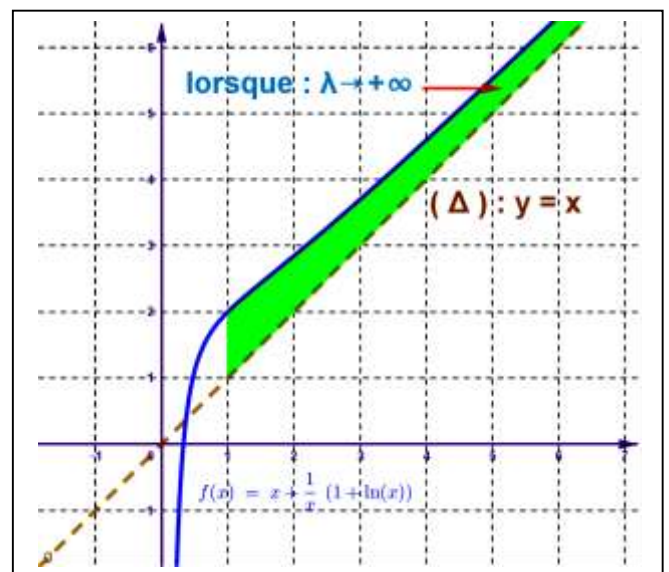
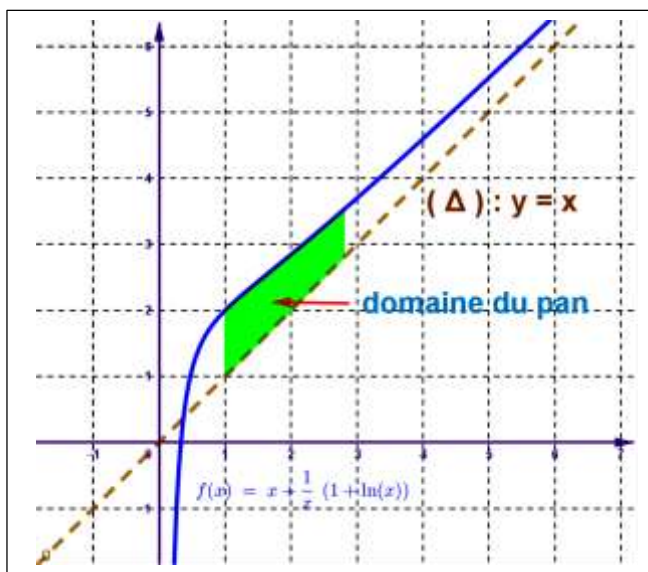
Soit $\lambda \in]1, +\infty[$ et (A) le domaine des points $M(x, y)$ du plan (P) tel que $\begin{cases} 1 \leq x \leq \lambda \\ x \leq y \leq f(x) \end{cases}$ c'est-à-dire domaine

plan limité par la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$

1. Colorer le domaine (A) puis lorsque λ tend vers $+\infty$.
2. Soit $A(\lambda)$ la surface du domaine (A) , calculer en cm^2 et en fonction de λ l'aire du domaine plan (A)
3. Calculer : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

Solution :

1. On colore le domaine (A) puis lorsque λ tend vers $+\infty$.



2. On calcule en cm^2 et en fonction de λ l'aire du domaine plan (A)



$$\begin{aligned}
 A(\lambda) &= \left(\int_1^\lambda |f(x) - x| dx \right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \quad (\text{unité de surface est le cm}^2) \\
 &= \left(\int_1^\lambda (f(x) - x) dx \right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \quad \text{cm}^2 \quad (\text{car la courbe est au dessus de la droite (D)}) \\
 &= \left(\int_1^e \left(x + \frac{1}{x}(1 + \ln x) - x \right) dx \right) \times 1 \times 1 \quad \text{cm}^2 \quad (\text{car unité de 1 cm}) \\
 &= \int_1^\lambda ((1 + \ln x)' (1 + \ln x)) dx \quad \text{cm}^2 \\
 &= \left[\frac{1}{2} (1 + \ln x)^2 \right]_1^\lambda \quad \text{cm}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left[(1 + \ln \lambda)^2 - (1 + \ln 1)^2 \right] \quad \text{cm}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left((1 + \ln \lambda)^2 - 1 \right) \quad \text{cm}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \ln \lambda^2 + \ln \lambda \quad \text{cm}^2
 \end{aligned}$$

Conclusion : l'aire du domaine plan (A) en cm^2 et en fonction de λ est :

$$A(\lambda) = \frac{1}{2} \ln \lambda^2 + \ln \lambda \quad \text{cm}^2$$

3. On calcule : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

On a :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \lambda^2 + \ln \lambda \\
 &= +\infty \quad \left(\text{car } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln \lambda = +\infty \right)
 \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = +\infty$

Exercice n° 5 :

On considère la fonction numérique f définie sur $D_f =]0, +\infty[$ par : $f(x) = 5 \frac{\ln x}{x}$,

Soit le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 2 cm) . (voir la figure après les questions)

Soit $\lambda \in]e, +\infty[$ et (A) le domaine des points $M(x, y)$ du plan (P) tel que : $\begin{cases} e \leq x \leq \lambda \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ c'est à dire

domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e$ et $x = \lambda$

1. Colorer le domaine (A) puis lorsque λ tend vers $+\infty$.

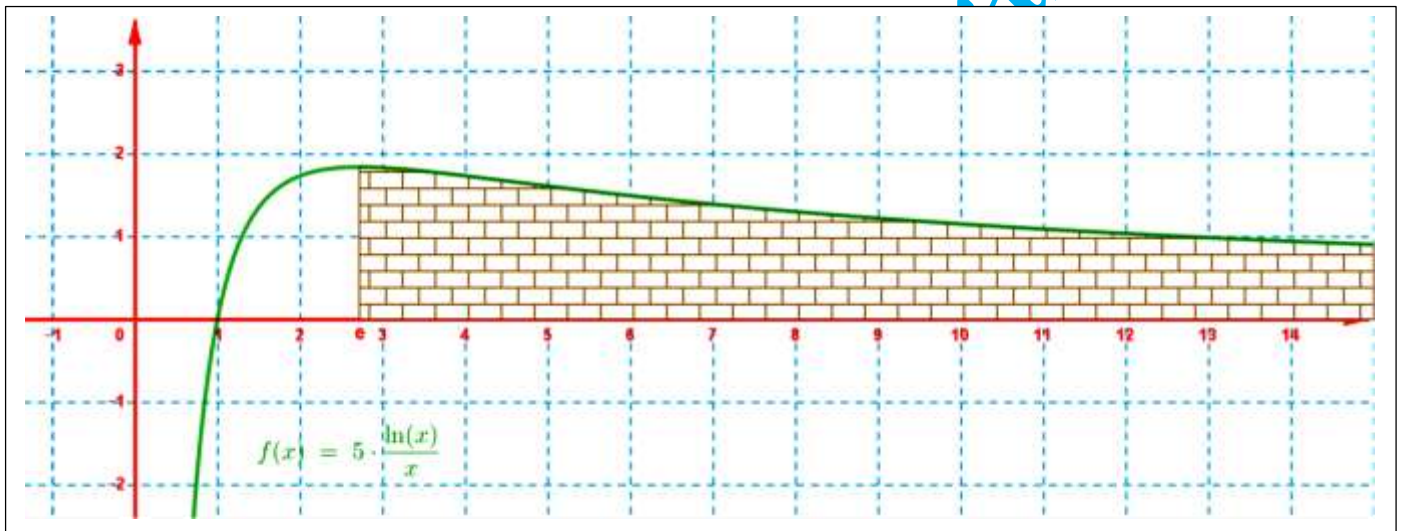
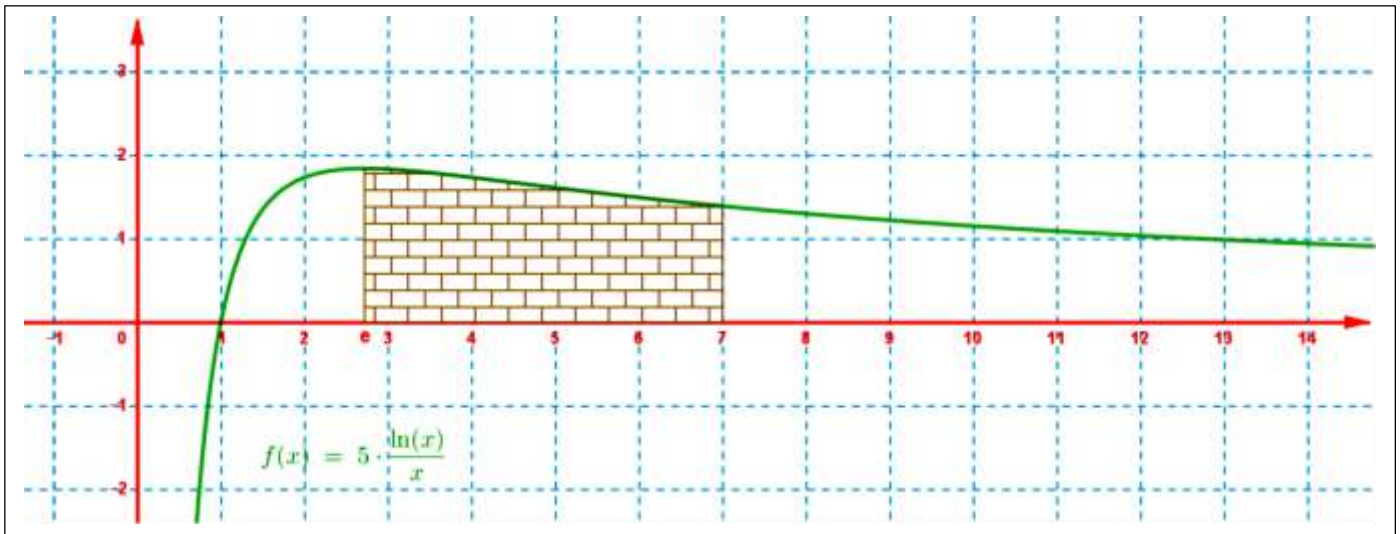
2. Soit $A(\lambda)$ la surface du domaine (A) ,calculer en cm^2 et en fonction de λ l'aire du domaine plan (A)

3. Calculer : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$



Solution :

1. On colore le domaine (A) puis lorsque λ tend vers $+\infty$.



$$= \left(\int_1^\lambda (f(x) - x) dx \right) \times \|i\| \times \|j\| \text{ cm}^2 \text{ (car la courbe est au dessus de la droite (D))}$$

$$= \left(\int_1^\lambda \left(\cancel{x} + \frac{1}{x}(1 + \ln x) - \cancel{x} \right) dx \right) \times 1 \times 1 \text{ cm}^2 \text{ (car unité de 1 cm)}$$

$$= \int_1^\lambda ((1 + \ln x)' (1 + \ln x)) dx \text{ cm}^2$$

$$= \left[\frac{1}{2} (1 + \ln x)^2 \right]_1^\lambda \text{ cm}^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[(1 + \ln \lambda)^2 - (1 + \ln 1)^2 \right] \text{ cm}^2$$

$$= \frac{1}{2} \left((1 + \ln \lambda)^2 - 1 \right) \text{ cm}^2$$

$$= \frac{1}{2} \ln \lambda^2 + \ln \lambda \text{ cm}^2$$



Conclusion : l'aire du domaine plan (A) en cm^2 et en fonction de λ est : $A(\lambda) = \frac{1}{2} \ln \lambda^2 + \ln \lambda \text{ cm}^2$

3. On calcule : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

On a : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \lambda^2 + \ln \lambda = +\infty$ (car $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln \lambda = +\infty$)

Conclusion : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = +\infty$

Exercice n° 6 :

On considère la fonction numérique f définie sur $D_f =]0, +\infty[$ par : $f(x) = 2x + 1 + \ln x$,

Soit le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 5 cm) . (voir la figure après les questions)

Soit $\lambda \in \left] 0, \frac{1}{5} \right[$ et (A) le domaine des points $M(x, y)$ du plan (P) tel que : $\begin{cases} \lambda \leq x \leq \frac{1}{5} \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$ c'est à dire

domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \frac{1}{5}$

1. Colorer le domaine (A) puis lorsque λ tend vers 0 par valeur supérieure .

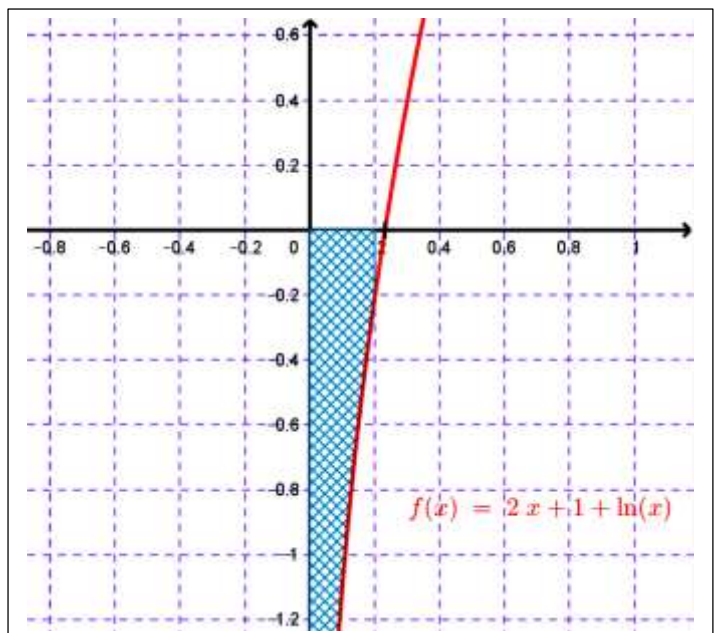
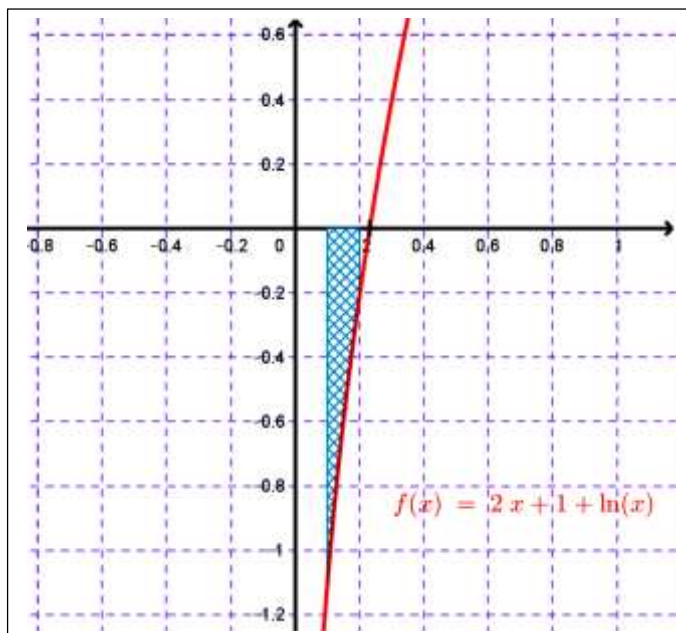
2. Montrer que : $H : x \mapsto x^2 + x \ln x$ est une primitive de la fonction $h \mapsto 2x + 1 + \ln x$ sur $]0, +\infty[$

3. Soit $A(\lambda)$ la surface du domaine (A) ,calculer en cm^2 et en fonction de λ l'aire du domaine plan (A)

4. Calculer : $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} A(\lambda)$

Solution :

1. On colore le domaine (A) puis lorsque λ tend vers 0 par valeur supérieure .





2. Montrons que : $H : x \mapsto x^2 + x \ln x$ est une primitive de la fonction $h \mapsto 2x + 1 + \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

On a :

$$\begin{aligned} H'(x) &= (x^2 + x \ln x)' \\ &= (x^2)' + (x \ln x)' \\ &= 2x + (x)' \ln x + x \times (\ln x)' \\ &= 2x + 1 \times \ln x + \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} \\ &= 2x + 1 + \ln x \end{aligned}$$

Conclusion : $H : x \mapsto x^2 + x \ln x$ est une primitive de la fonction $h \mapsto 2x + 1 + \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

3. On calcule en cm^2 et en fonction de λ l'aire du domaine plan (A)

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \left(\int_1^\lambda |f(x)| dx \right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \quad (\text{unité de surface est le } \text{cm}^2) \\ &= \left(-\int_1^\lambda f(x) dx \right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \quad \text{cm}^2 \quad (\text{car la courbe est au dessous de l'axe des abscisses}) \\ &= \left(\int_1^e (2x + 1 + \ln x) dx \right) \times 5 \times 5 \quad \text{cm}^2 \quad (\text{car unité de } 5 \text{ cm}) \\ &= 25 \int_\lambda^{\frac{1}{5}} (2x + 1 + \ln x) dx \quad \text{cm}^2 \\ &= 25 \left[x^2 + x \ln x \right]_\lambda^{\frac{1}{5}} \quad \text{cm}^2 \\ &= 25 \left[\left(\left(\frac{1}{5} \right)^2 + \frac{1}{5} \ln \left(\frac{1}{5} \right) \right) - \lambda^2 + \lambda \ln \lambda \right] \quad \text{cm}^2 \\ &= 1 - 5 \ln 5 - 25\lambda^2 - 25\lambda \ln \lambda \quad \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Conclusion : l'aire du domaine plan (A) en cm^2 et en fonction de λ est :

$$A(\lambda) = 1 - 5 \ln 5 - 25\lambda^2 - 25\lambda \ln \lambda \quad \text{cm}^2$$

4. On calcule : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (1 - 5 \ln 5 - 25\lambda^2 - 25\lambda \ln \lambda) \\ &= 1 - 5 \ln 5 \left(\text{car } \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \lambda \ln \lambda = 0 \right) \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} A(\lambda) = 1 - 5 \ln 5$

Remarque :

- la surface est un nombre fini même le domaine du plan n'est pas limité .
- la surface du domaine (A) lorsque λ tend vers 0 par valeur supérieure est : $1 - 5 \ln 5 \text{ cm}^2$ malgré l'unité de mesure est 5 cm .