

CALCULS INTEGRALES

Exercices d'applications et de réflexions avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB

2BAC sciences expérimentales (pc et svt.)

CALCULS INTEGRALES: Exercices avec solutions

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_2^4 3x dx \quad 2) J = \int_0^1 (2x+3) dx$$

$$3) K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt \quad 4) L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta$$

Solution : 1) la fonction $x \mapsto 3x$ est continue sur $[2;4]$

Une primitive sur $[2;4]$ est : $x \mapsto \frac{3}{2} x^2$

$$\text{Donc : } I = \int_2^4 3x dx = \left[\frac{3}{2} x^2 \right]_2^4 = \frac{3}{2} \times 4^2 - \frac{3}{2} \times 2^2 = 18$$

$$2) J = \int_0^1 (2x+3) dx = \left[x^2 + 3x \right]_0^1 = (1+3) - (0) = 4$$

$$3) K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$$

$$4) L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta = \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2}$$

Exercice2 : Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx \quad 2) I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx$$

$$3) I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \quad 4) I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt$$

$$5) I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} t e^{-t^2} dt \quad 6) I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$7) I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad 8) I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$$

$$9) I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad 10) I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$$

$$11) I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx \quad 12) I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$$

$$13) I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx \quad 14) I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx$$

$$15) I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx \quad 16) I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx$$

$$17) I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx \quad 18) I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx$$

$$19) I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx \quad 20) I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx$$

$$21) I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx$$

Solution : 1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx = \left[2 \frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 = [x^2 - x]_0^2$

$$I_1 = (2^2 - 2) - (0^2 - 0) = 4 - 2 = 2$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx = \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{4}{4} x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left[\frac{1}{5} x^5 - x^4 + 2x \right]_{-1}^1$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{5} x^5 - x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5} 1^5 - 1^4 + 2 \right) - \left(\frac{1}{5} (-1)^5 - (-1)^4 - 2 \right)$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{5} - 1 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{5} - 1 - 2 \right) = \frac{1}{5} - 1 + 2 + \frac{1}{5} + 1 + 2 = \frac{2}{5} + 4 = \frac{22}{5}$$

$$3) I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2} (2t)' e^{2t} dt = \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - \frac{1}{2} e^{2 \times 0}$$

$$I_4 = \frac{1}{2} e^{\ln 2^2} - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} 4 - \frac{1}{2} e^0 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$5) I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} t e^{-t^2} dt = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} -\frac{1}{2} (-t^2)' e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$$

$$I_5 = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}} = -\frac{1}{2} e^{-(\sqrt{\ln 2})^2} + \frac{1}{2} e^{-0^2} = -\frac{1}{2} e^{-(\ln 2)} + \frac{1}{2}$$

$$I_5 = -\frac{1}{2}e^{-\ln 2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{\ln 2}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$6) I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln^2 x dx = \int_1^e \ln' x \times \ln^2 x dx$$

$$I_6 = \left[\frac{1}{2+1} \ln^{2+1} x \right]_1^e = \frac{1}{3} \ln^3 e - \frac{1}{3} \ln^3 1 = \frac{1}{3}$$

$$7) I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = \left[\ln |e^x + 1| \right]_0^{\ln 2}$$

$$I_7 = \ln |e^{\ln 2} + 1| - \ln |e^0 + 1| = \ln |3| - \ln |2| = \ln 3 - \ln 2 = \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{(e^x - e^{-x})'}{e^x - e^{-x}} dx = \left[\ln |e^x - e^{-x}| \right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I_8 = \ln |e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}| - \ln |e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}| = \ln \left| 3 - \frac{1}{e^{\ln 3}} \right| - \ln \left| e^{\ln 2} - \frac{1}{e^{\ln 2}} \right|$$

$$I_8 = \ln \left| 3 - \frac{1}{3} \right| - \ln \left| 2 - \frac{1}{2} \right| = \ln \left(\frac{8}{3} \right) - \ln \left(\frac{3}{2} \right) = \ln \left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{2}} \right) = \ln \left(\frac{16}{9} \right)$$

$$9) I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e (\ln x)' (\ln x)^1 dx = \left[\frac{1}{1+1} (\ln x)^{1+1} \right]_1^e$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} (\ln e)^2 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx = 2 \int_2^3 \frac{(x^2+3x-4)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}} dx = 2 \left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3$$

$$I_{10} = 2 \left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3 = 2(\sqrt{14} - \sqrt{6})$$

$$I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x+1)' (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = 2 \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+1)^{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1$$

$$I_{11} = 2 \left[\frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3} (3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} (1)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \left((\sqrt{3})^3 - 1 \right) = \frac{4}{3} (3\sqrt{3} - 1)$$

$$12) I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \sin^3 x dx = \left[\frac{1}{4} \sin^{3+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{12} = \frac{1}{4} \sin^4 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin^4 0 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx = 3 \int_1^2 (3x-4)^{-5} dx = \int_1^2 (3x-4)' (3x-4)^{-5} dx$$

$$I_{13} = \left[\frac{1}{-5+1} (3x-4)^{-5+1} \right]_1^2 = \left[\frac{1}{-4} (3x-4)^{-4} \right]_1^2 = \frac{1}{-4} (2)^{-4} - \frac{1}{-4} (-1)^{-4}$$

$$I_{13} = \frac{1}{-4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{64} + \frac{16}{64} = \frac{15}{64}$$

$$14) I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx = \left[2x - \frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I_{14} = \left(2 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \sin \pi \right) - 0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$15) I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$$

(on a : $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$: linearization) Donc:

$$I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx$$

$$I_{15} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$I_{15} = \frac{\pi + 2}{8}$$

$$16) I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \frac{(2x+1)'}{2x+1} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln |2x+1| \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln |3| + 1 - \frac{1}{2} \ln |1| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 3$$

$$17) I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln^3 x dx = \int_1^e \ln' x \times \ln^3 x dx$$

$$I_{17} = \left[\frac{1}{3+1} \ln^{3+1} x \right]_1^e = \frac{1}{4} \ln^4 e - \frac{1}{4} \ln^4 1 = \frac{1}{4}$$

$$I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \left((x-1)^2 \right)' e^{(x-1)^2} dt = \left[\frac{1}{2} e^{(x-1)^2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} e^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e = \frac{1}{2} (1 - e)$$

$$19) I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1 + \ln x)} dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{x}}{(1 + \ln x)} dx$$

$$I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = \int_1^2 \frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)} dx = [\ln|1+\ln x|]_1^2$$

$$I_{19} = \ln|1+\ln 2| - \ln|1+\ln 1| = \ln|1+\ln 2| = \ln(1+\ln 2)$$

$$20) I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + (\tan x)^2 - 1 dx$$

$$I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((1 + (\tan x)^2) - 1) dx = [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_{20} = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$21) I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx = \int_1^e \left(8x^8 - 4 + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= \left[\frac{8}{9} x^9 - 4x + 2 \ln x \right]_1^e = \frac{8}{9} e^9 - 4e + \frac{46}{9}$$

Exercice3: Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_0^3 |x-1| dx \quad 2) J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$$

Solution : 1) on a $x \in [0, 3]$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ on va étudier le signe de : $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

la Relation de Chasles donne :

$$I = \int_0^3 |x-1| dx = \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^3 |x-1| dx$$

$$I = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$$

$$I = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{5}{2}$$

$$2) J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$$

$$x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-1$$

on va étudier le signe de : $x(x+1)$

a) si $x \in [-2; -1]$ alors : $x(x+1) \geq 0$

$$\text{donc : } |x(x+1)| = x(x+1)$$

b) si $x \in [-1; 0]$ alors : $x(x+1) \leq 0$

$$|x(x+1)| = -x(x+1)$$

La Relation de Chasles donne :

$$J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx = \int_{-2}^{-1} |x(x+1)| dx + \int_{-1}^0 |x(x+1)| dx$$

$$J = \int_{-2}^{-1} (x^2 + x) dx + \int_{-1}^0 (-x^2 - x) dx$$

$$J = \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0$$

$$J = \left(\frac{1}{6} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) + \left(0 - \left(-\frac{1}{6} \right) \right) = 1$$

Exercice4: on pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

1) Calculer $I+J$ et $I-J$

2) en déduire I et J

Solution :

$$1) I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$$

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}$$

$$2) \begin{cases} I+J = \frac{\pi}{4} \\ I-J = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ par sommation on trouve:}$$

$$2I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{ donc : } I = \frac{\pi+2}{8} \text{ et on remplace dans}$$

$$\text{dans la 1ère équation et on trouve: } \frac{\pi+2}{8} + J = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc: } J = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi+2}{8} = \frac{2\pi - \pi - 2}{8} = \frac{\pi-2}{8}$$

Exercice5 :

$$\text{on pose : } I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx \text{ et } J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$$

1) Calculer $I+J$ et $I-3J$

2) en déduire I et J

Solution :1)

$$I + J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx + \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx = \int_0^{\ln 16} \left(\frac{e^x + 3}{e^x + 4} + \frac{1}{e^x + 4} \right) dx$$

$$I + J = \int_0^{\ln 16} \left(\frac{e^x + 4}{e^x + 4} \right) dx = [x]_0^{\ln 16} = \ln 16 - 0 = 4 \ln 2$$

$$I - 3J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx - 3 \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx = \int_0^{\ln 16} \left(\frac{e^x + 3}{e^x + 4} - \frac{3}{e^x + 4} \right) dx$$

$$I - 3J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x}{e^x + 4} dx = \int_0^{\ln 16} \frac{(e^x + 4)'}{e^x + 4} dx = [\ln |e^x + 4|]_0^{\ln 16}$$

$$I - 3J = \ln |e^{\ln 16} + 4| - \ln |e^0 + 4| = \ln |20| - \ln |5| = \ln 20 - \ln 5$$

$$I - 3J = \ln \frac{20}{5} = \ln 4 = 2 \ln 2$$

2) $\begin{cases} I + J = 4 \ln 2 \\ I - 3J = 2 \ln 2 \end{cases}$ par soustraction on trouve:

$$4J = 2 \ln 2 \text{ donc: } J = \frac{\ln 2}{2}$$

Et on remplace dans la 1ère équation et on trouve :

$$\frac{\ln 2}{2} + I = 4 \ln 2 \text{ donc: } I = 4 \ln 2 - \frac{\ln 2}{2} = \frac{7 \ln 2}{2}$$

Exercice6: Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$ 2) $I = \int_0^{\ln 3} |2-e^x| dx$

3) $I = \int_0^2 |x^2 - x - 2| dx$

Solution : 1) $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

étude du signe de: $x-2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

La Relation de Chasles donne :

$$I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx = \int_0^2 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx + \int_2^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{-(x-2)}{(x^2-4x)^2} dx + \int_2^3 \frac{x-2}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{-(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^2} dx + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2-4x} \right]_1^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2-4x} \right]_2^3$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-4} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{6} - \frac{2}{8} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

2) $I = \int_0^{\ln 3} |2-e^x| dx$

$$2-e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \ln 2$$

$$I = \int_0^{\ln 2} |2-e^x| dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} |2-e^x| dx$$

$$I = \int_0^{\ln 2} (2-e^x) dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x - 2 dx$$

$$I = \frac{1}{2} [2x - e^x]_0^{\ln 2} + [e^x - 2x]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I = ((2 \ln 2 - 2) + 1) + ((3 - 2 \ln 3) - (2 - 2 \ln 2)) = \ln \left(\frac{16}{9} \right)$$

Exercice7: on pose :

$$A = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) dt \text{ et } B = \int_1^e \left(1 + \ln \left(\frac{1}{t} \right) \right) dt$$

Calculer $A+B$

Solution :

$$A+B = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \ln t + 1 + \ln \left(\frac{1}{t} \right) \right) dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \ln t + 1 - \ln(t) \right) dt$$

$$A+B = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + 1 \right) dt = [\ln |t| + t]_1^e = \ln e + e - \ln |1| - 1 = e$$

Exercice8: on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx$ et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$$

1) Calculer $I+J$ et $I-J$

2) en déduire I et J

Solution :

$$1) I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$$

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \times 1 dx = \frac{1}{2} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I + J = \frac{1}{2} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} [\sin \pi - \sin 0]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \times \cos 2x dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x dx \text{ on a : } \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad a = 2x$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\pi \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$2) \begin{cases} I + J = 0 \\ I - J = \frac{\pi}{4} \end{cases} \text{ par sommation on trouve: } 2I = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc : } I = \frac{\pi}{8} \text{ et on remplace dans la 1ère}$$

$$\text{équation et on trouve : } \frac{\pi}{8} + J = 0 \Leftrightarrow J = -\frac{\pi}{8}$$

$$\text{Exercice9 : on pose : } K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \text{ et}$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$1) \text{ Calculer } K + L \text{ et } K - L$$

$$2) \text{ en déduire } K \text{ et } L$$

$$\text{Solution : 1) } K + L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

La linéarité de l'intégrale donne :

$$K + L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \right) dx$$

$$K + L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

La linéarité de l'intégrale donne :

$$K - L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} - \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \right) dx$$

$$K - L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{(\cos x + \sin x)'}{\cos x + \sin x} \right) dx$$

$$K - L = \left[\ln |\cos x + \sin x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$2) \begin{cases} K + L = \frac{\pi}{4} \\ K - L = \frac{1}{2} \ln 2 \end{cases} \text{ par sommation et soustraction}$$

$$\text{on trouve: } 2K = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \text{ et } 2L = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\text{Donc : } K = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2 \text{ et } L = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$$

Exercice10 : 1) vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad \frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t}$$

$$2) \text{ Calculer l'intégrale suivante : } I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$$

Solution : 1)

$$\frac{t^2}{1+t} = \frac{(t^2 - 1) + 1}{1+t} = \frac{t^2 - 1}{1+t} + \frac{1}{1+t} = \frac{(t-1)(t+1)}{1+t} + \frac{1}{1+t}$$

$$\text{Donc : } \frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$2) I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt = \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{(1+t)'}{1+t} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln |1+t| \right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{2} - 1 + \ln |2| = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

Exercice11 : 1) vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\} \quad \frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}$$

$$2) \text{ Calculer l'intégrale suivante : } I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx$$

Solution : 1)

$$\begin{aligned} \frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} &= \frac{18(x-1) - 2(x+1)}{4(x+1)(x-1)} = \frac{18x - 18 - 2x - 2}{4(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{16x - 20}{4(x+1)(x-1)} = \frac{4x-5}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x-5}{x^2-1} \end{aligned}$$

$$2) I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx = \int_3^5 \left(\frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} \right) dx$$

$$= \frac{9}{2} \int_3^5 \frac{1}{(x+1)} dx - \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{1}{x-1} dx = \frac{9}{2} \int_3^5 \frac{(x+1)'}{(x+1)} dx - \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{(x-1)'}{x-1} dx$$

$$= \frac{9}{2} [\ln|x+1|]_3^5 - \frac{1}{2} [\ln|x-1|]_3^5 = \frac{9}{2} (\ln 6 - \ln 4) - \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 2)$$

$$I = \frac{9}{2} \ln 6 - \frac{9}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{9}{2} \ln 6 - \frac{19}{2} \ln 2$$

Exercice12 :

Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$

Solution :

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1-2}{x+1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} \right) dx$$

$$I = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx = \int_0^1 1 dx - 2 \int_0^1 \frac{(x+1)'}{x+1} dx = [x]_0^1 - 2 [\ln|x+1|]_0^1$$

$$I = 1 - 2 \ln 2$$

Exercice13 : 1) déterminer les réels a et b tels

$$\text{que : } \frac{x^3}{x^2+1} = ax + \frac{bx}{x^2+1}$$

2) en déduire l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$

Exercice14 : Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx$$

Solution : On remarque que :

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$\text{donc : } I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx = \int_0^1 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

et la linéarité de l'intégrale donne :

$$I = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx$$

$$I = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx$$

$$I = \frac{1}{4} [\ln|x-2|]_0^1 - \frac{1}{4} [\ln|x+2|]_0^1$$

$$I = -\frac{1}{4} \ln 2 - \frac{1}{4} (\ln 3 - \ln 2) = -\frac{1}{4} \ln 3$$

Exercice15 : on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

1) montrer que : $\cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ (linéarisation de $\cos^4 x$)

2) en déduire l'intégrale I

Solution : 1) on a : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ donc :

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4$$

$$= \frac{1}{16} \left((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3 \cdot (e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2 \cdot (e^{-ix})^2 + 4(e^{ix}) \cdot (e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4 \right)$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{i3x} e^{-ix} + 6e^{2ix} e^{-2ix} + 4e^{ix} e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6)$$

$$= \frac{1}{16} ((e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6)$$

Or on sait que :

$$2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix} \text{ et } 2 \cos nx = e^{inx} + e^{-inx}$$

$$\text{Donc : } \cos^4 \theta = \frac{1}{16} ((2 \cos 4x) + 4(2 \cos 2x) + 6)$$

$$\text{Donc : } \cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$$

$$2) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) dx$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \sin 4x + 4 \frac{1}{2} \sin 2x + 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin 2\pi + 4 \frac{1}{2} \sin \pi + 3 \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{16}$$

Exercice16 : Montrer les inégalités suivantes

$$1) \int_1^e \ln x dx \geq 0 \quad 2) \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$$

Solution : 1) on a $\ln$ positive et continue sur le segment $[1; e]$ et $1 \leq e$ donc : $\int_1^e \ln x dx \geq 0$

$$2) \text{ Montrons que : } \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$$

Soit $t \in [0; 1]$ donc $-1 \leq -t^2 \leq 0$ et puisque :

$x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ alors : $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$

Et puisque : $t \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0;1]$ et

$$0 < 1 \text{ Alors : } \int_0^1 e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 1 dt$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$$

Exercice17 : Montrer que : $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3}$

Solution : on a $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$$

$$\text{Donc : } \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$$

$$\text{Donc : } \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^2 dx$$

$$\text{Donc : } \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^1 \leq I \leq \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \text{ Donc : } \frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3}$$

Exercice18 : d'application Soit $f : x \rightarrow e^{-x^2}$

Définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $a \geq 1$, on s'intéresse à l'intégrale

$$F(a) = \int_1^a f(x) dx$$

1) Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$:

$$0 \leq f(x) \leq e^{-x}.$$

2) En déduire que pour tout réel $a \geq 1$:

$$0 \leq F(a) \leq e^{-1}.$$

Solution: 1) Une exponentielle étant toujours positive : $0 \leq f(x)$ pour tout réel x et donc en particulier pour tout $x \geq 1$. De plus, si $x \geq 1$ alors $x \leq x^2$, c'est-à-dire $-x \geq -x^2$ et donc

$e^{-x} \geq f(x)$ par croissance de la fonction exponentielle.

On en déduit donc que pour tout réel $x \geq 1$

$$0 \leq f(x) \leq e^{-x}$$

2) À partir de l'inégalité obtenue, on utilise la propriété précédente sur l'intervalle $[1; a]$ et ainsi

$$\int_1^a 0 dx \leq \int_1^a f(x) dx \leq \int_1^a e^{-x} dx$$

$$0 \leq F(a) \leq \left[-e^{-x} \right]_1^a \text{ Donc } 0 \leq F(a) \leq -e^{-a} + e^{-1} \leq e^{-1}$$

Donc : $0 \leq F(a) \leq e^{-1}$ ce qui démontre l'inégalité.

Exercice19 : soit la suite numérique (u_n) définie

$$\text{par : } u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que (u_n) est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{Solution : 1) } u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1+x^n - 1 - x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx \end{aligned}$$

On sait que : $0 \leq x \leq 1$ donc : $0 \leq 1-x$

$$\text{Et on a : } \frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0 \text{ car } 0 \leq x$$

$$\text{Donc : } \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$$

$$\text{Donc : } \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx \geq 0$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc : (u_n) est croissante

2) Montrons que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{On a : } x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x^n + 1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^n + 1} \leq 1$$

$$\text{Donc : } \int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n + 1} dx \leq \int_0^1 1 dx$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2} [x]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n + 1} dx \leq [x]_0^1$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice 20: soit la suite numérique (u_n)

définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0;1] : \frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$$

2) En déduire: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{e^n} \right)$

Exercice 21: on considère la fonction numérique

définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

Déterminer La valeur moyenne de f sur $[0; \ln 2]$

Solution : La valeur moyenne de f sur $[0; \ln 2]$

Est : $f(c) = \frac{1}{\ln 2 - 0} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{1}{\ln 2 - 0} \int_0^{\ln 2} \left(\frac{e^x + 1}{(e^x + 1)^2} \right)' dx$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left[-\frac{1}{e^x + 1} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3 \ln 2}$$

Exercice 22: Calculer les intégrales suivantes :

1) $B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$ 2) $C = \int_0^1 2x \sqrt{x^2 + 1} dx$

Solution : 1) $B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \int_1^e (\ln x)' (\ln x)^3 dx$

$$= \left[\frac{(\ln x)^4}{4} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^4}{4} - \frac{(\ln 1)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

2) $C = \int_0^{\sqrt{3}} 2x \sqrt{x^2 + 1} dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 + 1) (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx$

$$= \left[\frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2} + 1}}{1 + \frac{1}{2}} \right]_1^{\sqrt{3}} = \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} (2 - 1) = \frac{2}{3}$$

Exercice 23: Calculer l'intégrale suivante :

1) $I = \int_0^\pi x \sin x dx$ 2) $J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$

3) $K = \int_1^e \ln x dx$

Solution :1) $I = \int_0^\pi x \sin x dx$

On pose : $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = x$

Donc $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = 1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0; \pi]$ et u' et v' sont continue sur $[0; \pi]$

donc: $I = [-x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x dx = [-x \cos x]_0^\pi - [-\sin x]_0^\pi = \pi$

2) $J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$

On pose : $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$

Donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0; \ln 2]$ et u' et v' sont continue sur

$[0; \ln 2]$

Donc : $J = [x e^x]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} 1 e^x dx = \ln 2 e^{\ln 2} - [e^x]_0^{\ln 2}$

$$J = 2 \ln 2 - (e^{\ln 2} - 1) = 2 \ln 2 - (2 - 1) = 2 \ln 2 - 1$$

3) $K = \int_1^e \ln x dx$ on a $K = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e 1 \times \ln x dx$

On pose : $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$

Donc : $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[1; e]$ et u' et v' sont continue sur $[1; e]$

Donc : $K = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = e \ln e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx$

$$K = e - \int_1^e 1 dx = e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

Exercice 24 : En utilisant une intégration par partie calculer : 1) $I = \int_0^1 x e^{2x} dx$ 2)

$$J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

3) $K = \int_0^1 x \sqrt{e^x} dx$ 3) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

$$4) M = \int_1^e (x \ln x) dx \quad 5) N = \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

Solution :

1) $I = \int_0^1 x e^{2x} dx$ la démarche est la même

$$I = \int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} \left[x e^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left[x e^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{4} \left[e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$$

$$I = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_1^{e^3} x^{-\frac{2}{3}} \ln x dx$$

$$= \left[\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - \int_1^{e^3} \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - 3 \int_1^{e^3} x^{-\frac{4}{3}} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - 9 \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \right]_1^{e^3} = 9$$

Exercice 25 : En utilisant une intégration par partie calculer :

$$J = \int_0^1 (x-1) e^{-x} dx \quad K = \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx$$

$$M = \int_1^e x(1-\ln x) dx \quad N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$R = \int_1^e x \ln x dx \quad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

Exercice 26 : On pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3} dx$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx$$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

$$\text{montrer que : } \frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Exercice 27 : $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$$

Soit f définie sur $[1;3]$ par : $f(x) = 2x + 1$

1) vérifier que f est continue et positif sur $[1;3]$
2) tracer C_f la courbe représentative de la fonction f sur $[1;3]$

3) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 3$

4) calculer l'intégrale : $I = \int_1^3 f(x) dx$

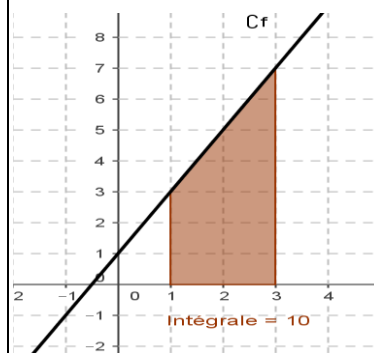
Que peut-on dire ?

Solution : 1) f est une fonction polynôme donc continue sur $[1;3]$

$$x \in [1;3] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq 2x+1 \leq 7$$

Donc : f est continue et positif sur $[1;3]$

2)



3) Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est

$$A(\Delta_f) = 2 \times 3 + \frac{4 \times 2}{2} = 2 \times 3c^2m + \frac{4 \times 2}{2} c^2m = 10c^2m$$

$$4) I = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (2x+1) dx = \left[x^2 + x \right]_1^3$$

$$I = (3^2 + 3) - (1^2 + 1) = 12 - 2 = 10$$

5) on remarque que : $A(\Delta_f) = \int_1^3 f(x) dx = u.a$

$$\text{Avec : } u.a = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| = 1 \times 1 = 1$$

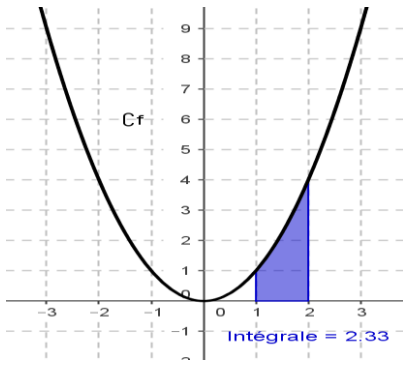
Exercice 28 : $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm et Soit } f \text{ défini par : } f(x) = x^2$$

1) tracer C_f la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 2$

Solution : 1)



2) f est continue et positif sur $[1;3]$ on a donc :

$$A = \int_1^3 |f(x)| dx = \int_1^3 x^2 dx = \int_1^3 x^2 dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 = \frac{1}{3} \times 2^3 - \frac{1}{3} \times 1^3 = \frac{7}{3} \times 2cm \times 2cm = \frac{28}{3} c^2m$$

Exercice 29: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthogonale avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$

Soit f définit par : $f(x) = x^2 - 2x$

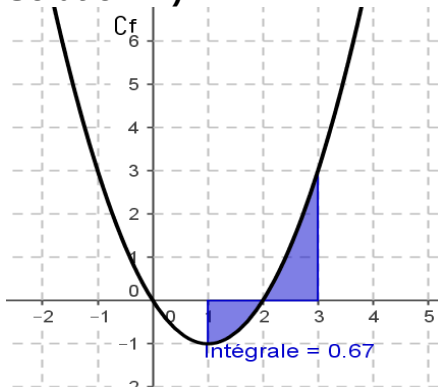
1) tracer Cf la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par :

Cf , l'axe des abscisses et les droites :

$x = 1$ et $x = 3$

Solution :1)



2) f est une fonction polynôme donc continue sur

$$[1;3] \text{ donc : } A = \int_1^3 |f(x)| dx = \int_1^3 |x^2 - 2x| dx$$

Etudions le signe de : $x^2 - 2x$ dans $[1;3]$

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
x^2-2x	+	0	-	0	+

$$A = \int_1^3 |x^2 - 2x| dx = \int_1^2 |x^2 - 2x| dx + \int_2^3 |x^2 - 2x| dx$$

$$A = \int_1^2 -(x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$$

$$A = -\left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3 = \left[-\frac{1}{3} x^3 + x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3$$

$$= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + \frac{1}{3} \times 1^3 - 1^2 + \frac{1}{3} \times 3^3 - 3^2 - \frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2$$

$$= -\frac{2}{3} \times 2^3 + 8 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{27}{3} - 9 = -\frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{27}{3} - 2$$

$$A = 2 \times 2cm \times 3cm = 12c^2m$$

Exercice30 :

$(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f définit par : $f(x) = 1 - e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : Cf ,

l'axe des abscisses et les droites :

$x = \ln 2$ et $x = \ln 4$

Solution : il suffit de calculer : $I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)| dx$

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)| dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^x| dx$$

On sait que : $\ln 2 \leq x \leq \ln 4$ donc : $e^{\ln 2} \leq e^x \leq e^{\ln 4}$

Donc : $2 \leq e^x \leq 4$ donc $e^x > 1$ par suite: $1 - e^x < 0$

Donc:

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^x| dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} -(1 - e^x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^x - 1) dx$$

$$I = \left[e^x - x \right]_{\ln 2}^{\ln 4} = (e^{\ln 4} - \ln 4) - (e^{\ln 2} - \ln 2)$$

$$I = (4 - 2 \ln 2) - (2 - \ln 2) = 4 - 2 \ln 2 - 2 + \ln 2 = 2 - \ln 2$$

$$\text{Donc : } A = (2 - \ln 2) \times 2cm \times 2cm = 4(2 - \ln 2)c^2m$$

Exercice 31: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f définit par : $f(x) = e^x - 3$

Calculer A la surface du domaine limité par : Cf ,

l'axe des abscisses et les droites :

$x = \ln 3$ et $x = \ln 6$

Exercice 32: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f définit par : $f(x) = \ln x - 1$

Calculer A la surface du domaine limité par : Cf ,

l'axe des abscisses et les droites :

$x = 1$ et $x = e$

Exercice 33: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} \text{ et } g(x) = e^{-x}$$

calculer en cm^2 la surface du domaine limité par

: (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=\ln 2$

Solution : il suffit de calculer :

$$I = \int_0^{\ln 2} |f(x) - g(x)| dx$$

$$I = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} - e^{-x} \right| dx = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{2e^x}{e^x + 1} \right| dx = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x + 1} dx$$

Car : $\frac{2e^x}{e^x + 1} > 0$

$$\text{Donc: } I = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x + 1} dx = 2 \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = \left[2 \ln |e^x + 1| \right]_0^{\ln 2}$$

Donc :

$$I = 2 \ln |e^{\ln 2} + 1| - 2 \ln |e^0 + 1| = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 = 2 \ln \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc : } A = 2 \ln \frac{3}{2} \times 2cm \times 2cm = 8 \ln \frac{3}{2} cm^2$$

Exercice34 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 0.5cm$ et Soit f définit par : $f(x) = x^2 - 8x + 12$

et (D) la tangente à la courbe (C_f) au point

$$A(3; f(3))$$

Calculer A la surface du domaine limité par :

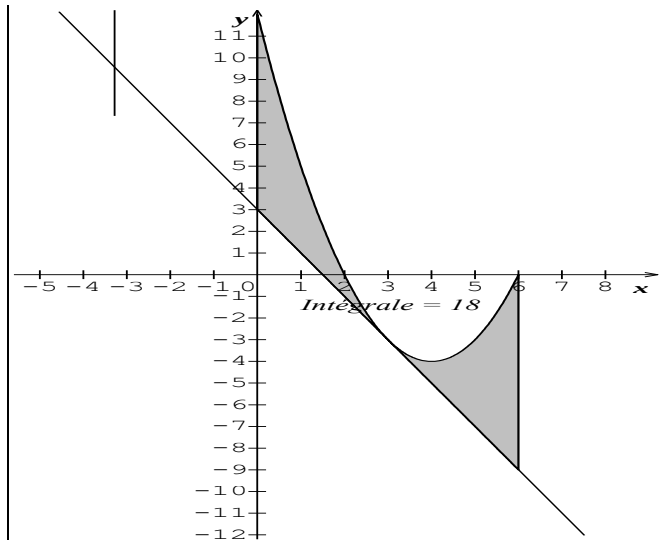
(C_f) et les droites : (D) et $x=1$ et $x=e$

Solution : l'équation de la tangente à la courbe

(C_f) au point $A(3; f(3))$ est : $y = f(3) + f'(3)(x-3)$

$$f'(x) = 2x - 8 \text{ et } f'(3) = -2 \text{ et } f(3) = -3$$

$$(D): y = -2x + 3$$



il suffit de calculer :

$$I = \int_0^6 |f(x) - y| dx = \int_0^6 (x^2 - 6x + 9) dx = \int_0^6 (x+3)'(x+3)^2 dx$$

$$I = \left[\frac{(x+3)^3}{3} \right]_0^6 = 18 \text{ donc :}$$

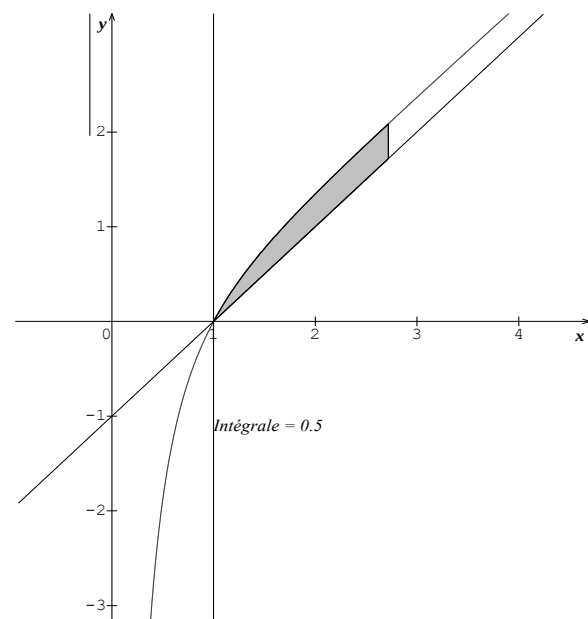
$$A = 18 \times (0.5cm)^2 = 4.5cm^2$$

Exercice35 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 1cm$ et Soit f définit par : $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

Calculer A la surface du domaine limité par :

C_f et les droites : $y = x - 1$ et $x=1$ et $x=e$



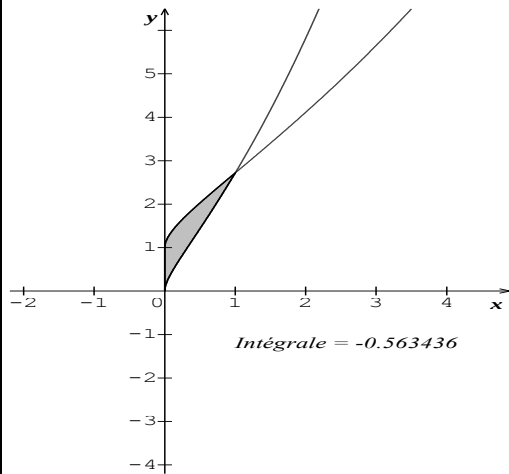
Exercice36 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ et

$g(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine

limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=1$

Solution :



$$S = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \text{ Ua}$$

$$S = \int_0^1 |e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}| dx = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} |1 - \sqrt{x}| dx$$

On sait que : $0 \leq x \leq 1$ donc : $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$ donc :

$$0 \leq 1 - \sqrt{x} \text{ donc : } S = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} (1 - \sqrt{x}) dx$$

On utilisant deux intégration l'une par changement de variable et l'autre par partie on trouve :

$$S = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} (1 - \sqrt{x}) dx = \left[(6(\sqrt{x} - 1) - 2x) e^{\sqrt{x}} \right]_0^1$$

$$S = 6 - 2e \text{ Ua}$$

Exercice37 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x + x + 1}{e^x + 1}$$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.

2) Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droites: $x=0$ et $x=1$.

3) Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite $(\Delta) y=x$; la courbe C_f et les droites: $x=0$ et $x=1$.

Exercice38 : $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

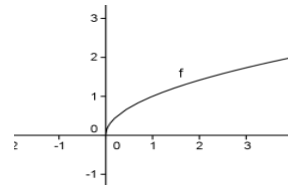
Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a=0$ et $b=4$

Solution : La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a=0$ et $b=4$ engendre un solide :

$$I = \int_0^4 \pi (f(x))^2 dx = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$$

$$I = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi \text{ et on a :}$$

$$u.v = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \|\vec{k}\| = 8cm^3$$



Donc le volume est : $V = 8\pi \times 8cm^3 = 64\pi cm^3$

Exercice39 : $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = \frac{2}{3}cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)} \text{ et } (C) \text{ la courbe de } f$$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0;1]$

Solution : on calcul : $\int_0^1 x(e^x - 1) dx$

$$I = \int_0^1 \pi (f(x))^2 dx = \int_0^1 \pi (x(e^x - 1))^2 dx = \pi \int_0^1 x(e^x - 1) dx$$

On utilise une intégration par partie :

On pose : $u'(x) = e^x - 1$ et $v(x) = x$

Donc : $u(x) = e^x - x$ et $v'(x) = 1$

$$\text{Donc : } \int_0^1 x(e^x - 1) dx = \left[x(e^x - x) \right]_0^1 - \int_0^1 1(e^x - x) dx$$

$$\int_0^1 x(e^x - 1) dx = e - 1 - \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$\int_0^1 x(e^x - 1) dx = e - 1 - e + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Donc : $I = \frac{1}{2} \pi$ par suite :

$$V = \frac{1}{2} \pi \times \frac{8}{27} c^3 m = \frac{4\pi}{27} c^3 m$$

Exercice40: $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$

et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré
par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des
abscisses dans l'intervalle $[1; e]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et

exercices

Que l'on devient un mathématicien

