

Niveau: 2 P.C. + 2 S.V.- COURS



CALCULS D'INTEGRALS

page



I. Intégral d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$:

a. Définition :

f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé intégral de f de a à b , on note $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$.

On lit intégral de a à b de $f(x)dx$.

b. Remarque :

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ on peut remplacer le variable x soit par les variables y et z et $t \dots$ donc :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \dots$$

c. Exemple :

Calculons :

$$\bullet \int_0^1 (x^2 - 2x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}1^3 - 1^2 \right) - \left(\frac{1}{3}0^3 - 0^2 \right) = -\frac{2}{3}.$$

$$\bullet \int_1^0 (x^2 - 2x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_1^0 = \left(\frac{1}{3}0^3 - 0^2 \right) - \left(\frac{1}{3}1^3 - 1^2 \right) = \frac{2}{3}.$$

$$\bullet \int_2^{1+e} \frac{4}{x-1}dx = \int_2^{1+e} 4 \times \frac{(x-1)'}{x-1}dx = [4\ln|x-1|]_2^{1+e} = (4\ln(1+e-1) - 4\ln(2-1)) = 4$$

$$\bullet 4 \int_2^{1+e} \frac{1}{x-1}dx = 4 \int_2^{1+e} \frac{(x-1)'}{x-1}dx = 4[\ln|x-1|]_2^{1+e} = 4(\ln(1+e-1) - \ln(2-1)) = 4.$$

On remarque que :

$$\bullet \int_0^1 (x^2 - 2x)dx = -\int_1^0 (x^2 - 2x)dx.$$

$$\bullet \int_2^{1+e} \frac{4}{x-1}dx = 4 \int_2^{1+e} \frac{1}{x-1}dx.$$

II. Propriétés : relation de Shales – linéarité – ordre .

a. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un segment $[a, b]$ et sa fonction dérivée f' est continue sur $[a, b]$ on a :

$$\bullet \int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a).$$

$$\bullet \int_a^b cdx = [cx]_a^b = c(b-a); (c \in \mathbb{R}).$$

b. Exemple :

$$\bullet \int_0^1 (x^2 - 2x)'dx = [x^2 - 2x]_0^1 = (1^2 - 2 \times 1) - (0^2 - 2 \times 0) = -1.$$

$$\bullet \int_3^5 7dx = 7(5-3) = 14.$$

c. Relation de Chasles :

f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ on a :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ avec $a \leq c \leq b$. (relation de Chasles) .

d. Exemples :

- $\int_5^5 (x^2 - 2x)dx = 0$
- $\int_0^1 (x^2 - 2x)dx = -\int_1^0 (x^2 - 2x)dx$
- $\int_0^3 |x-1|dx = \int_0^1 |x-1|dx + \int_1^3 |x-1|dx$
 $= \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 (x-1)dx$ (car $|x-1| = 1-x$ sur $[0,1]$ et $|x-1| = x-1$ sur $[1,3]$)
 $= \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^3$
 $= \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$
 $= \frac{5}{2}$

e. Linéarité :

f et g sont deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ on a :

- $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
 $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$; $(\alpha \in \mathbb{R})$

f. Exemples :

■ Exemple 1 :

- $\int_2^{1+e} \frac{4}{x-1}dx = 4 \int_2^{1+e} \frac{1}{x-1}dx$.
- On pose : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx$
 1. On calcule : $A+B$ et $A-B$.
 2. On déduit les valeurs de A et B .

Correction :

 1. On calcule $A+B$ et $A-B$.
 ✓ On a :



$$\begin{aligned} A + B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\ &= 1 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc $A + B = \frac{\pi}{2}$

✓ On a :

$$\begin{aligned} A - B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x) - \sin^2(x)) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx \quad ; \quad (\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos 2x) \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (\sin(\pi) - \sin 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $A + B = \frac{\pi}{2}$

2. On déduit les valeurs de A et B .

$$\text{On a : } \left. \begin{aligned} A + B &= \frac{\pi}{2} \\ A - B &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = B = \frac{\pi}{4} .$$

Conclusion : $A = B = \frac{\pi}{4}$.

■ Exemple 2 :

Montrer que : $\int_2^5 \ln(x+1) dx \leq \int_2^5 \ln(x+3) dx$.

Sachant que :

$$\begin{aligned} 1 &\leq 3 \Rightarrow x+1 \leq x+3 \\ &\Rightarrow \int_2^5 (x+1) dx \leq \int_2^5 (x+3) dx \end{aligned}$$

Conclusion : $\int_2^5 \ln(x+1) dx \leq \int_2^5 \ln(x+3) dx$.

Niveau: 2 P.C. + 2 S.V.- COURS



CALCULS D' INTEGRALS

page



III. Valeur moyenne :

a. Propriété :

f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et $a < b$.

Il existe au moins un élément c de $[a, b]$ tel que : $(b-a) \times f(c) = \int_a^b f(x) dx$.

Le nombre $f(c) = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[ab]$.

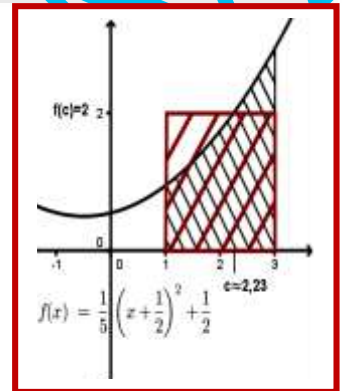
b. Exemple :

Soit $f(x) = 3x$.

On détermine la valeur moyenne de f sur $[0, 2]$:

$$\text{On a : } f(c) = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2-0} \int_0^2 3x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} (4-0) = 3.$$

Conclusion : la valeur moyenne de f sur $[0, 2]$ est $f(c) = 3$.



IV. L' intégration par parties :

a. Théorème :

u et v sont deux fonctions dérivables sur $[ab]$ leurs dérivées u' et v' sont continues sur $[ab]$ on a

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = \underbrace{\left[u(x) \times v(x) \right]_a^b}_{(1)} - \underbrace{\int_a^b u'(x) \times v(x) dx}_{(2)}$$

b. Méthode ou bien disposition :

$u(x) = \dots$ $u'(x) = \dots$

(1) ↓ (2) ↘ - ↓ (3)

$v'(x) = \dots$ $v(x) = \dots$

c. Exemples :

On calcule : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ en utilisant une intégration par parties.

On pose :

$u(x) = x$ $u'(x) = 1$

(1) ↓ (2) ↘ - ↓ (3)

$v'(x) = \cos x$ $v(x) = \sin x$

$$\text{D'où : } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \sin x dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \sin 0 \right) - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$



Conclusion : $I = \frac{\pi}{2} - 1$.

- On calcule : $J = \int_1^e x \ln(x) dx$ en utilisant l'intégration par parties .

On pose :

$$u(x) = \ln(x) \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = x \quad v(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \int_1^e x \ln(x) dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} (e^2 \ln(e) - 1^2 \ln(1)) - \frac{1}{2} \int_1^e x dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} (e^2 - 1^2) = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Conclusion : $J = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$.

V. Applications sur les intégrales calculs des surfaces :

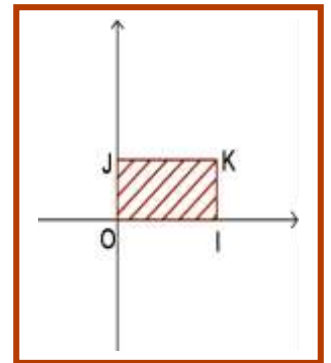
OL.

Calculs des surfaces :

a. Introduction :

➤ **Unité d'aire (unité de surface) :**

- Le plan (P) est rapporté a un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- on pose $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$ et le point K tel que OIKJ est parallélogramme .
- On considère la surface du parallélogramme OIKJ comme unité d'aire (du la surface) cette aire on la note 1 u.a



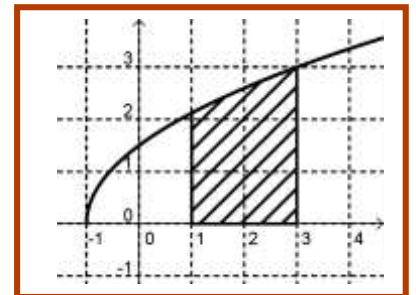
➤ **L'aire (F) est la partie du plan (P) compris entre la courbe (C_f) et l'axe des abscisses**

f est une fonction continue sur $[ab]$ et (C_f) la courbe de f .

- (F) est la partie du plan (P) compris entre la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
- On désigne par A la surface de la partie (F) du plan (P) .

Remarque : la surface A se calcule par l'intégral

$$\int_a^b f(x) dx \text{ et dépend du signe de } f(x)$$



Niveau: 2 P.C. + 2 S.V.- COURS



CALCULS D' INTEGRALS

page



b. Propriété :

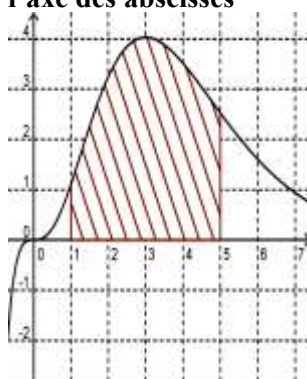
f est une fonction continue sur $[ab]$ et (C_f) la courbe de f dans le plan (P) est rapporté a un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

L'aire S (la surface) de la partie (F) du plan (P) comprise entre la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $A = \int_a^b |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ (u.a) (unité d'aire)

c. Les cas possibles :

La fonction f est positive sur $[ab]$.

(c'est-à-dire (C_f) au dessus de l'axe des abscisses

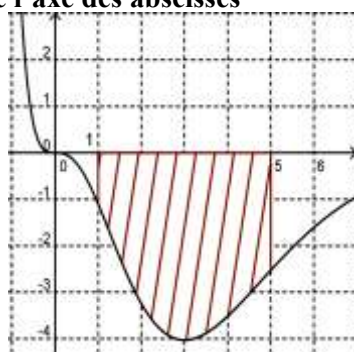


La surface est :

$$A = \int_a^b f(x) dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ u.a}$$

La fonction f est négative sur $[ab]$.

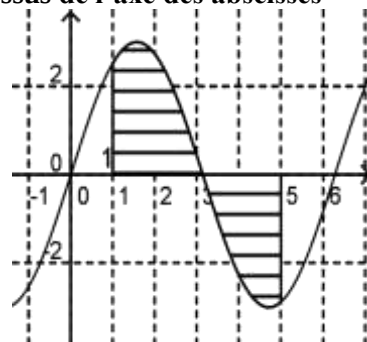
(c'est-à-dire (C_f) au dessous de l'axe des abscisses



La surface est :

$$A = -\int_a^b f(x) dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ u.a}$$

La fonction f est change de signe sur $[ab]$. (c'est-à-dire (C_f) au dessous et au dessus de l'axe des abscisses

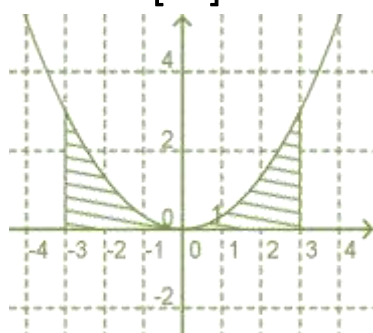


La surface est :

$$A = \int_a^b |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ u.a}$$

$$= \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx \text{ (u.a)}$$

f est une fonction paire sur $[-a, a]$ est positive sur $[0, a]$.



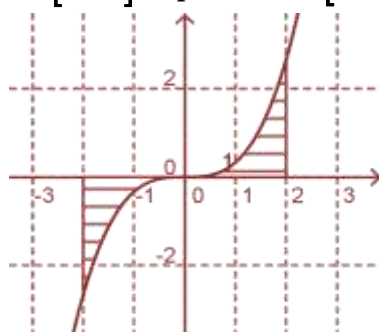
On a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \text{ u.a}$$

Remarque :

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$$

f est une fonction impaire sur $[-a, a]$ et positive sur $[0, a]$



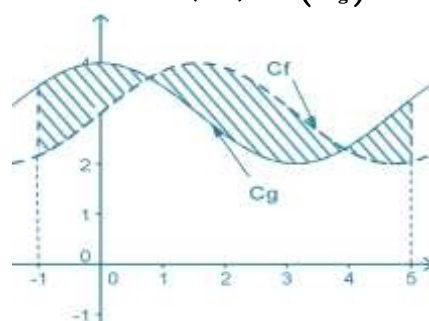
On a est :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \text{ u.a}$$

Remarque : $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx$$

domaine du plan comprise entre les deux courbes (C_f) et (C_g)



On considère $\mathcal{A}$ La surface du domaine du plan comprise entre les deux courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. La surface est :

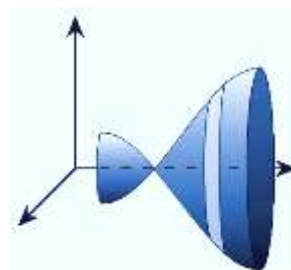
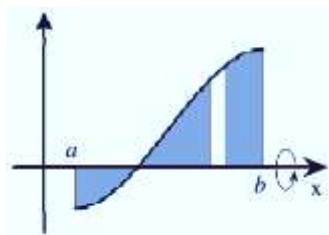
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ u.a}$$



02. Calculs des volumes :

a. Approche :

- L'espace est muni d'un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- (C_f) la courbe d'une fonction continue sur $[ab]$ avec $(a < b)$.
- On suppose que (C_f) tourne au tour de l'axe des abscisse de 360° la forme obtenue s'appelle le solide de révolution
- le solide de révolution obtenu à pour volume :



b. Propriété :

L'espace est muni d'un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(C_f) la courbe f est une fonction continue sur $[ab]$ avec $(a < b)$.

Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $[a, b]$ au tour de

l'axe des abscisse de 360° son volume V est : $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$ (unité de volume)

c. Exemple :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\text{cm}$.

Exemple 1 :

On considère la fonction $f(x) = x - 5$ sur $[-1, 2]$, (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1. On construit Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $[a, b]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .

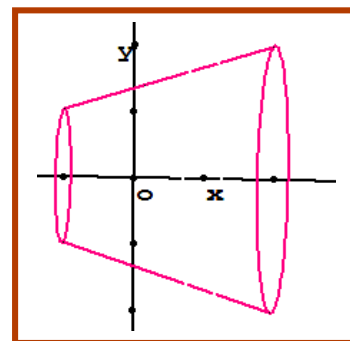
2. On calcule V le volume du solide de révolution obtenu :

On a : $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$ (unité de volume)

$$V = \int_{-1}^2 \pi (x-5)^2 dx 1 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$$

$$= \pi \int_{-1}^2 (x-5)^2 dx \text{ cm}^3$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} (x-5)^3 \right]_{-1}^2 \text{ cm}^3$$





$$= \frac{\pi}{3} \left((-3)^3 - (-6)^3 \right) \text{ cm}^3$$

$$= \frac{\pi}{3} (-3^3 + 6^3) \text{ cm}^3$$

$$= 63\pi \text{ cm}^3$$

Conclusion : le volume du solide de révolution est $V = 63\pi \text{ cm}^3$.

Exemple 2 :

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$, (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1. On construit Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $[a,b]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .

2. On calcule V le volume du solide de révolution obtenu :

On a : $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$ (unité de volume)

$$V = \int_{-1}^1 \pi \sqrt{1-x^2}^2 dx 1 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$$

$$= \int_{-1}^1 \pi (1-x^2) dx 1 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$$

$$= \pi \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 \text{ cm}^3$$

$$= \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Conclusion : le volume du solide de révolution est $V = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$.

Remarque :

- c'est le volume d'une boule de rayon $R = 1$.
- Si on la fonction $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ sur $[-R, R]$ avec $R > 0$.

on obtient le volume d'une boule de rayon $R > 0$: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

