

Exercices d'applications et de réflexions sur les nombres complexes (Partie 2)

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

TD : NOMBRES COMPLEXES (Partie 2)

Exercice1 : Donner la forme exponentielle des complexes suivants :

1) $z_1 = 2 + 2i$ 2) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ 3) $z_1 \times z_2$

4) $\frac{z_1}{z_2}$ 5) $(z_2)^{12}$

Exercice2 : en utilisant la Formule de Moivre

1) montrer que : $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$

Et que : $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

2) montrer que : $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$

Et que : $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

3) montrer que : $\cos 4\theta = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3 \theta \sin \theta - 4\cos \theta \sin^3 \theta$

Exercice3 : Linéariser : $\cos^4 \theta$

Exercice4 : 1) Montrer que $(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

2) on pose : $u = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $v = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$ et $u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

Et $u_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$

Déterminer le module et l'argument du nombre complexes : $u + v$; u_1 et u_2

Exercice5 : 1) en utilisant la formule d'Euler

Montrer que : $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \theta \in \mathbb{R}$

2) Montrer que : $\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$

3) Montrer que : $\sin^3 \theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta \quad \theta \in \mathbb{R}$

4) Montrer que : $\sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$

5) Linéariser : a) $\sin^5 \theta$ b) $\cos^2 \theta \sin^3 \theta$

Exercice6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

suivantes : 1) $(E) : z^2 - z + 2 = 0$

2) $(E) : z^2 - z - 2 = 0$

3) $(E) : z^2 - 2z + 1 = 0$

Exercice7 : soit $z \in \mathbb{C}$ on pose : $P(z) = z^2 - 2z + 2$

1) calculer : $P(1-i)$

2) en déduire dans $\mathbb{C}$ la résolution de l'équations $P(z) = 0$

Exercice8 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

suivantes : 1) $(z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0$

2) $z^2 - 6z + 13 = 0$

3) $(4\cos \theta)z^2 - 2(\cos 2\theta)z + i\sin \theta = 0$ avec : $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice9 : 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^2 - 8z + 17 = 0$

2) Soit $P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$

a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur unique comme solution.

b) déterminer les réels $a; b; c$ tels que :

$$P(z) = (z + i)(az^2 + bz + c)$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$

Exercice10 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$1) 2Z^2 - 2Z + 5 = 0 \quad 2) 3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$$

Exercice11: soit : $z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1) Donner la forme exponentielle et la forme algébrique du nombre complexes z

2) en déduire : $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

Exercice12 : Dans le plan complexe $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : A ; B ; C d'affixe respectivement $z_A = 3+5i$; $z_B = 3-5i$; $z_C = 7+3i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $aff(\vec{u}) = 4-2i$

1) montrer que : $z' = z + 4 - 2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$)

2) vérifier que le Point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3) déterminer $z_{B'}$ l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$

Exercice13 : Dans le plan complexe $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le points : A d'affixe $z_A = 3+5i$ et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par l'homothétie de centre $\Omega(3; -2)$ et de Rapport $k = 4$

1) montrer que : $z' = 4z - 9 + 6i$ (l'écriture complexe de l'homothétie $h(\Omega, k)$)

2) déterminer $z_{A'}$ l'affixe de A' l'image de A par l'homothétie $h(\Omega, k)$

Exercice14 : Dans le plan complexe direct

$(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : A ; B d'affixe respectivement $z_A = 7+2i$; $z_B = 4+8i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) montrer que : $z' = iz + 4i + 12$ (l'écriture complexe de la rotation r)

2) montrer que l'affixe du point C l'image de A par la rotation r est $z_C = 10+11i$

Exercice15 : Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Exercice16 : Soit la rotation r de centre $\Omega(i)$ et transforme O en $O' \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)$

Déterminer L'angle de cette rotation

Exercice 17: Soit f une transformation plane qui transforme M(z) en M' (z') tel que

$$z' = -2z + 3 - 3i$$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques

Exercice 18: Dans le plan complexe direct

$(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point : A (i) et la rotation

R_0 de centre O (0) et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et soit R_1 la

rotation de centre A (i) et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Déterminer la nature de la transformation $R_1 \circ R_0$ et ses éléments caractéristiques

Exercice 19: soit ABC un triangle isocèle et rectangle on A tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
et soit R la rotation de centre A et qui transforme B en C et soit la translation $T = t_{\overrightarrow{AB}}$

Déterminer : $F_1 = R \circ T$ et $F_2 = T \circ R$

Exercice 20: soit Z un nombre complexe non nul

Montrer que : $|z-1| \leq |z| + |\arg z|$

Exercice 21 : soit a et b et c des nombres complexes tels que :

$$|a| = |b| = |c| = 1 \text{ et } a \neq c \text{ et } b \neq c$$

1) Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2) en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 22 : soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

1) Montrer que les nombres S et T sont conjugués

2) Montrer que : $\text{Im}(S) > 0$

3) calculer $S+T$ et $S \times T$

4) en déduire les nombres S et T

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

