

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE1:

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = i^{2020} ; \quad z_2 = (3 - \sqrt{2}i)^2 ; \quad z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}i}$$

$$z_4 = \frac{(1-2i)^2 - (1-i)^3}{(1+3i)^3 + (1+i)^2} ; \quad z_5 = \frac{1}{7-4i}$$

$$z_6 = \frac{1+i}{1-i} ; \quad z_7 = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i} + \frac{i}{2}.$$

EXERCICE2:

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$.
- On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points d'affixes respectives A, B et C , tel que :

$$z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; z_B = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et } z_C = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
 - Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
- On désigne par A' l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - Placer le point A' et démontrer que le triangle $AA'C$ est isocèle en A .
- On désigne par B' l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
 - Placer le point B' , et exprimer l'affixe $z_{B'}$ en fonction z_B .
 - En déduire la forme trigonométrique et la forme algébrique de $z_{B'}$.
- Calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

EXERCICE3: (Session normale 2016)

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4bz + 29 = 0$
- Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et Ω d'affixes respectives a, b et ω telles que :
 $a=5+2i ; b=5+8i \text{ et } \omega=2+5i$
 - Considérons $u = b - \omega$. Vérifier que $u = 3+3i$, puis montrer que $\arg(u) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.
 - Déterminer un argument du nombre complexe $\bar{u}$.
 - Vérifier que: $a - \omega = \bar{u}$, en déduire que

$$\Omega A = \Omega B \text{ et que } \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$
 - Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 Déterminer l'image du point A par la rotation R .

EXERCICE4: (Session normale 2019)

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
- Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a = 1 - i\sqrt{3}$;
 $b = 2 + 2i ; c = \sqrt{3} + i \text{ et } d = -2 + 2\sqrt{3}$
 - Vérifier que : $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$.
 - En déduire que A, B, C et D sont alignées.
- On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe M' l'image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Vérifier que $z' = \frac{1}{2}az$
- Soit $H(h)$ l'image du point B par la rotation R , et le point $P(p)$, tel que $p = a - c$
 - Vérifier que : $h = ip$.
 - Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O .

EXERCICE5:

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 ; b = 3 + 4i ;$
 $c = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}) \text{ et } d = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})$.
 L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C .

- Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D .
 - En déduire que les points B et D sont sur un cercle (C) de centre A dont on déterminera le rayon.
- Soit F , l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

- Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.
- Montrer que le point F est le milieu de $[CD]$.
- Montrer que $\frac{c - z_F}{a - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\frac{c - z_F}{a - z_F}$. Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$.

EXERCICE6:

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que:

- $|z - 1 + 2i| = 4$
- $|z - 2 + i| = |\bar{z} + 2 - 2i|$
- $|iz - 2 + i| = 6$
- $|\bar{z} - 1 + 2i| = |z - 3 - i|$
- $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = -1$
- $\arg(z) = \frac{\pi}{4} [\pi]$

EXERCICE7:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2i$; $b = -\sqrt{3} + i$ et $c = -\sqrt{3} - i$.

1) Placer les points A, B et C sur une figure.

2) Soit $z = \frac{a-b}{c-b}$.

a. Interpréter géométriquement $|Z|$ et $\arg(Z)$.

b. Écrire Z sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

c. En déduire la nature du triangle ABC .

d. Déterminer $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

EXERCICE8:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, et f la transformation du plan qui à M d'affixe z associe M' d'affixe z' tel que : $z' = 4z + 6 - 3i$.

Déterminer l'unique point invariant de f et en déduire la nature et les éléments caractéristique de f .

EXERCICE9:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 1 - i\sqrt{3}$.

1) a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b. Démontrer que les points A, B et C sont sur un même cercle (Γ) de centre O .

c. Construire le cercle (Γ) .

2) Déterminer un argument du nombre complexe b , et

on déduire $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Quelle est la nature du triangle OAB ?

EXERCICE10:

Soit m un nombre complexe de module 2, a et b deux nombres complexes tel que :

$$a = 1 + i + m \quad \text{et} \quad b = 1 - i + m$$

1) Déterminer m pour que a et b soient conjugués.

2) Déterminer m pour que a et b soient de même module

3) Déterminer m pour que $a + ib = 0$.

EXERCICE11:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$.

b- Ecrire les solutions sous la forme algébrique et trigonométrique.

2) On considère les points A et B d'affixes respectives $2 - 2i$ et $2 + 2i$.

a- Placer dans le plan les points A et B .

b- Quelle est la nature du triangle OAB ?

3) Soit le point C d'affixe : $z_C = (2 - 2i) \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$.

a- Ecrire z_C sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

b- En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

4) a- Comparer OA et OC et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$.

b- quelle est la nature exacte du triangle OAC .

EXERCICE12: (Session normale 2015)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 10z + 26 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives : $a = -2 + 2i$;

$$b = -5 + i ; \quad c = -5 - i \quad \text{et} \quad \omega = -3$$

a) Vérifier que : $\frac{b-\omega}{a-\omega} = i$.

b) En déduire la nature du triangle ΩAB .

3) Soit D l'image du point C par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $6 + 4i$.

a) Montrer que l'affixe de D est $d = 1 + 3i$

b) Montrer que $\frac{b-d}{a-d} = 2$, en déduire que A est le milieu $[BD]$.

EXERCICE13:

1) Linéarisez $\cos^4 x$ et $\cos^4 x \times \sin^2 x$.

2) Calculer les deux intégrales I et J suivants :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x \times \sin^2 x) \, dx$$

EXERCICE14:

Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$, on pose $Z = \frac{iz(z-1)}{z+1}$.

1) Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes : $z + 1$; $z - 1$ et Z

2) Déterminer la partie réelle X de Z et la partie imaginaire Y de Z .

EXERCICE15:

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

$$\text{Posons :} \quad Z = \frac{z - (4 + 2i)}{z + 2i}$$

a) Déterminer la forme cartésienne de z' .

b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit réel.

c) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.

d) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$