



IX. Notation exponentielle ou écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul :

a. Définition :

- L'écriture trigonométrique de $z = [r, \alpha] = [|z|, \arg z]$ sera notée de la manière suivante
 $z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = re^{i\alpha}$
- $z = re^{i\alpha}$ s'appelle l'écriture exponentielle ou la forme exponentielle de z non nul
- propriétés : $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$; $\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$; $\frac{1}{e^{i\beta}} = e^{-i\beta}$; $e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ avec α et β de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

b. Formules d'EULER :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose on a : $z = [1, \alpha] = \cos \alpha + i \sin \alpha$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument α . Donc $z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$ d'où :

$$\left. \begin{aligned} z = \cos \alpha + i \sin \alpha &= e^{i\alpha} \\ \bar{z} = \cos \alpha - i \sin \alpha &= e^{-i\alpha} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} z + \bar{z} = 2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \\ z - \bar{z} = 2i \sin \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{cases}$$

formules d'EULER

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{cases}$$

Remarque : avec $z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$

D'après formule de Moivre on a :

$$z^n = [1, \alpha]^n = (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

$$(\bar{z})^n = [1, -\alpha]^n = (e^{-i\alpha})^n = e^{-in\alpha} = \cos n\alpha - i \sin n\alpha$$

D'où :

$$\bullet e^{in\alpha} + e^{-in\alpha} = z^n + (\bar{z})^n = 2 \cos n\alpha$$

$$\bullet e^{in\alpha} - e^{-in\alpha} = z^n - (\bar{z})^n = 2i \sin n\alpha .$$

$$\bullet e^{in\alpha} \times e^{-in\alpha} = z^n \times (\bar{z})^n = 1$$



Formules d'EULER

Leonhard EULER
(Bâle 1707, Saint-Petersbourg 1783)



La notation i fut introduite par Euler, le grand mathématicien suisse. Dans ce livre, on notera j à la place de i , notation utilisée pour l'intensité en électricité.

Données clés

Naissance

15 avril 1707

Bâle (Suisse)

Décès

18 septembre 1783 (à 76 ans)

Saint-Petersbourg (Russie)

Nationalité

Suisse

Champs

Mathématiques et physique

Institutions

Académie des sciences de Russie

Académie de Berlin

Renommé pour

Liste complète

Signature

Leonh. Euler

c. Application linéarisation :

- On linéarise $\cos^3 x$.

D'après formules d'EULER : $\cos \alpha = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ d'où :

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^3 = \frac{1}{2^3} (z + \bar{z})^3 = \frac{1}{8} (z^3 + 3z^2\bar{z} + 3z(\bar{z})^2 + (\bar{z})^3) = \frac{1}{8} (z^3 + (\bar{z})^3 + 3z\bar{z} \times (z + \bar{z})) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos 3x + 3 \times 1 \times 2\cos x) = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x. \end{aligned}$$

Conclusion : $\cos^3 x = 2\cos 3x + 6\cos x$.

X. Equation du deuxième degré :

01. Equation de la forme $z \in \mathbb{C} : z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$:

a. Activité :

1. Résoudre les équations suivantes :

- $z \in \mathbb{C} / z^2 = 0$.
- $z \in \mathbb{C} / z^2 = 2$.
- $z \in \mathbb{C} / z^2 = -2$.

2. Donner la propriété :

b. Propriété :

Soit a est un réel, ensemble des solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C} : z^2 = a$ est :

- Si $a = 0$ alors $S = \{0\}$.
- Si $a > 0$ alors $S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$.
- Si $a < 0$ alors $S = \{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}$.

02. Equation du 2^{ème} degré de la forme $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$; $a \in \mathbb{R}^*$ $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$:

a. Activité :

On considère l'équation suivante : (F) : $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$.



On a : $az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

d'où : $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$

$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad ; (a \neq 0)$

$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad ; (1)$

• 1^{er} cas $\Delta = 0$: (1) $\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a}$ donc l'équation a une solution double $z = -\frac{b}{2a}$

• 2^{ème} cas $\Delta > 0$: On a : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ donc l'équation à deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

• 3^{ème} cas $\Delta < 0$:

Donc $-\Delta > 0$ par suite : $\Delta = -1 \times (-\Delta) = i^2 (\sqrt{-\Delta})^2 = (i\sqrt{-\Delta})^2$

D'où : (1) $\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}$

$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2$

$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } z + \frac{b}{2a} = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } z = -\frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$\Leftrightarrow z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Conclusion : l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

b. Théorème :

Equation du 2^{ème} degré de la forme $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$; $a \in \mathbb{R}^*$ $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ a pour solutions :

• 1^{er} cas $\Delta = 0$: l'équation a une solution double $z = -\frac{b}{2a}$

• 2^{ème} cas $\Delta > 0$: l'équation à deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

• 3^{ème} cas $\Delta < 0$: l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$



c. Remarque :

- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$.
- $\Delta \neq 0$ alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
- $\Delta = 0$ alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$.

d. Application :

On considère l'équation suivante : (E) : $z \in \mathbb{C} / z^2 + z + 1 = 0$.

1. Calculons Δ le discriminant de l'équation.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

2. On déduit les solutions de l'équation :

Puis que $\Delta < 0$: l'équation a deux solutions complexes conjuguées sont :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

XL. L'écriture complexe des transformations suivantes : translation – homothétie – rotation.

01. Vocabulaire :

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

- On considère la relation suivante : cette relation à tout point $M_{(z)}$ de (P) d'affixe z on associe le point $M'_{(z')}$ de (P) d'affixe z' .

- Cette relation est notée f ou g et appelée transformation dans le plan (P).

$$f : (P) \rightarrow (P)$$

- Cette transformation est représentée de la manière suivante :

$$M_{(z)} \mapsto f(M_{(z)}) = M'_{(z')}$$

- L'écriture : $z' = f(z)$ est appelée l'écriture complexe du transformation f

02. L'écriture complexe de certains transformation f :

A. L'écriture complexe d'une translation $f = t_{\vec{u}}$:

a. Rappel :

Translation : $f = t_{\vec{u}}$ est définie par pour tout point M de (P) on a : $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

b. Remarque :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{MM'}} = Z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z' - z = u \text{ avec } M_{(z)} \text{ et } M'_{(z')} \text{ et } \vec{u}_{(b)}.$$

c. Propriété :

- L'écriture complexe du translation $f = t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe le complexe b est $z' - z = b$ ou bien $z' = z + b$.
- Toute transformation f dans le plan complexe qui transforme $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ tel que : $z' = z + b$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe le complexe b :

d. Application :

- On considère la transformation f qui associe tout point $M_{(z)}$ de (P) d'affixe z on associe le point $M'_{(z')}$ de (P) d'affixe z' tel que : $z' = z + 2 - 3i$.

1. on détermine la nature de cette transformation f :

on remarque que l'écriture complexe du translation $f = t_u$ est de la forme $z' = z + b$ d'où f est

une translation du vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b = 2 - 3i$ $\left(\vec{u} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \right)$.

B. L'écriture complexe d'une homothétie $f = h(\Omega, k)$:e. Rappel :

Homothétie : $f = h(\Omega, k)$ Ω est le centre de l'homothétie et k le rapport de l'homothétie

Homothétie : $f = h(\Omega, k)$ est définie par pour tout point M de (P) on a : $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$

f. Remarque :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} &\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = Z_{k \overrightarrow{\Omega M}} \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \end{aligned}$$

avec $M_{(z)}$ et $M'_{(z')}$ et $\Omega_{(\omega)}$.

g. Propriété :

- L'écriture complexe de l'homothétie $f = h(\Omega, k)$ de centre le point Ω et de rapport k non et différent de 1 ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$) est $z' - \omega = k(z - \omega)$ ou bien $z' = kz + b$ avec ($b = \omega - k\omega \in \mathbb{C}$).
- Toute transformation f dans le plan complexe qui transforme $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ tel que : $z' = kz + b$ est une homothétie :

- de centre le point $\Omega_{(\omega)}$, Ω est un point invariant par f c.à.d. $f(\Omega) = \Omega$ ou $\omega = k\omega + b$ d'où $\omega = \frac{b}{1-k}$
- De rapport $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

h. Application :

- On considère la transformation f qui associe tout point $M_{(z)}$ de (P) d'affixe z on associe le point $M'_{(z')}$ de (P) d'affixe z' tel que : $z' = 2z + 1 + i$.

1. on détermine la nature de cette transformation f :

on remarque que l'écriture complexe de la transformation f est de la forme $z' = kz + b$ d'où f est une homothétie de rapport $k = 2$ et de centre le point $\Omega_{(\omega)}$ Ω est un point invariant par f c.à.d.

$$\omega = 2\omega + 1 + i \text{ d'où : } \omega = \frac{1+i}{1-2} = -1-i.$$

Conclusion : la transformation f est une homothétie de rapport $k = 2$ et de centre le point Ω d'affixe $\omega = -1-i$ ou bien $f = h(\Omega_{(\omega=-1-i)}, 2)$ (le centre est le point de coordonnées $(-1, -1)$)



C. L'écriture complexe d'une rotation $f = r(\Omega, \theta)$:

i. Rappel :

Rotation : $f = r(\Omega, \theta)$ Ω est le centre de la rotation r et θ est l'angle de la rotation r (θ est mesure)

La rotation : $f = r(\Omega, \theta)$ est définie par pour tout point $M \neq \Omega$ de (P) on a :

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} \text{ et pour } \Omega \text{ on a : } f(\Omega) = \Omega \quad (\Omega \text{ est un point invariant})$$

j. Remarque :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} &\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = Z_{k \overrightarrow{\Omega M}} \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \end{aligned} \quad \text{avec } M_{(z)} \text{ et } M'_{(z')} \text{ et } \Omega_{(\omega)}.$$

k. Propriété :

• L'écriture complexe de la rotation $f = r(\Omega, \theta)$ de centre le point Ω et d'angle θ est $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ ou bien $z' = ze^{i\theta} + b$ avec $(b = \omega - \omega e^{i\theta} \in \mathbb{C})$.

• Toute transformation f dans le plan complexe qui transforme $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ tel que : $z' = az + b$

avec $a \neq 1$ et $|a| = 1$ (ou $z' = ze^{i\theta} + b$) est une rotation :

❖ de centre le point $\Omega_{(\omega)}$ Ω est un point invariant par f c.à.d. $\omega = a\omega + b$ (ou $\omega = e^{i\theta}\omega + b$) d'où :

$$\omega = \frac{b}{1-a} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{b}{1-e^{i\theta}}.$$

❖ D'angle $\arg(a) \pmod{2\pi}$ (ou $\theta \equiv \arg(e^{i\theta}) \pmod{2\pi}$) ou encore $\theta \equiv \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \pmod{2\pi}$.

l. Application :

• On considère la transformation f qui associe tout point $M_{(z)}$ de (P) d'affixe z on associe le point $M'_{(z')}$

de (P) d'affixe z' tel que : $z' = -iz + 1 - i$

2. on détermine la nature de cette transformation f :

$$\text{on a : } z' = -iz + 1 - i = e^{i\pi}z + (1 - i)$$

on remarque que l'écriture complexe de la transformation f est de la forme $z' = ze^{i\theta} + b$ d'où f est une rotation :

• de centre $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1+i} = -i$ d'où le centre est le point $\Omega_{(\omega=-i)}$.

• d'angle : $\arg(e^{i\theta}) \equiv \arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

• **Conclusion** : la transformation f est une rotation $r\left(\Omega_{(\omega=-i)}, -\frac{\pi}{2}\right)$ de centre est le point de coordonnées $(0, 1)$.



c. Exercice :

Parmi les écritures complexes des transformations suivantes indiqué la nature et les éléments caractéristiques de chaque transformation .

1. $z' = -4z - 2 + 5i$.

2. $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) z - 4 + 2i$.

Correction :

1. Pour : $z' = -4z - 2 + 5i$

l'écriture complexe une homothétie f est de la forme $z' = kz + b$ avec $k = -4 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ d'où f est une homothétie de rapport $k = -4$ et de centre le point $\Omega_{(\omega)}$ Ω est un point invariant par f c.à.d.

$\Omega = \Omega'$ donc $\omega' = \omega$ d'où : $\omega = -3\omega - 8 + 12i$ d'où : $\omega = \frac{-8 + 12i}{4} = -2 + 3i$ (on peut utiliser la

relation suivante $\omega = \frac{b}{1-k} = \frac{-8 + 12i}{1+3} = -2 + 3i$) .

Conclusion : la transformation f est une homothétie de rapport $k = -4$ et de centre le point Ω d'affixe $\omega = -2 + 3i$ ou bien $f = h(\Omega_{(\omega=-2+3i)}, -4)$ (le centre est le point de coordonnées $(-2, 3)$)

2. Pour $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) z - 4 + 2i$.

On a : $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) z - 4 + 2i = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) z - 4 + 2i = e^{i\frac{\pi}{6}} z - 4 + 2i$.

D'où l'écriture complexe est de la forme : $z' = ze^{i\theta} + b$.

Conclusion : la transformation f est une rotation de centre le point Ω d'affixe

$\omega = -4 - \sqrt{3} - (3 + 2\sqrt{3})i$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$ ou bien $f = h(\Omega_{(\omega=-4-\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i)}, \frac{\pi}{6})$ (le centre est le point de coordonnées $(-4-\sqrt{3}, -(3+2\sqrt{3}))$)

d. Résumé pour les transformations précédentes :

Rappel Transformation est :	Ecriture complexe	Transformation donnée de la forme f transforme le point $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ avec $z' = az + b$; $(a, b \in \mathbb{C})$ Le programme se limite à trois cas les valeurs de a
Translation : $f = t_{\vec{u}}$ $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' - z = b$ ou bien $z' = z + b$	1 ^{er} cas $a = 1$ on a : $z' = z + b$ Nature de la transformation : f est une Translation Eléments caractéristiques : • b est l'affixe du vecteur $\vec{u}$ de la translation f .
Homothétie : $f = h(\Omega, k)$ Ω centre de l'homothétie k rapport de l'homothétie définition : $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$ ou bien $z' = kz + b$ ($b = \omega - k\omega \in \mathbb{C}$)	2 ^{ème} cas $a = k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ on a : $z' = kz + b$ Nature de la transformation f : f est une Homothétie Eléments caractéristiques : • k rapport de l'homothétie f



		• $\omega = \frac{b}{1-k} = \frac{b}{1-a}$ est l'affixe du centre Ω de l'homothétie f • Remarque : Ω est invariant par f donc $f(\Omega) = \Omega$ D'où : $z' = kz + b \Leftrightarrow \omega = k\omega + b$ donc $\omega = \frac{b}{1-k}$
Rotation : $f = r(\Omega, \alpha)$ Ω centre de l'homothétie α angle de rotation définition : $f(M) = M' \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases}$	$z' - \omega = (z - \omega)e^{i\alpha}$ ou bien $z' = e^{i\alpha}z + b$ ($b = \omega - \omega e^{i\alpha}$)	3^{ème} cas $a = 1$ on a : $z' = e^{i\alpha}z + b$ ou $z' = az + b = (\cos \alpha + i \sin \alpha)z + b$ ou $z' = (x + yi)z + b$; (avec $x + yi = 1$) Nature de la transformation f : f est une Rotation Eléments caractéristiques : • α ou $\arg(x + yi)$ est l'angle de la rotation . • Ou $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-e^{i\theta}} = \frac{b}{1-(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \frac{b}{1-(x + yi)}$ $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-e^{i\theta}}$ est l'affixe du centre Ω de la rotation f • Remarque : ❖ Ω est invariant par f donc $f(\Omega) = \Omega$ D'où : $z' = az + b \Leftrightarrow \omega = k\omega + b$ donc $\omega = \frac{b}{1-a}$. ❖ De même : $\alpha \equiv \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \pmod{2\pi}$

Remarque pour la rotation :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = [1, \alpha] = e^{i\alpha} \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = (z - \omega)e^{i\alpha} \end{aligned}$$

XII. la géométrie plane et Les nombres complexes



A et B et C et D et I cinq points du plan complexe tel que leurs affixes sont z_A et z_B et z_C et z_D et z_I

• $\|\vec{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$

• $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ affixe de I milieu de $[AB]$

Mesure de $(\vec{u}, \vec{AB})$ est :

$(\vec{u}, \vec{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$

$\vec{AC} = k\vec{AB} \Leftrightarrow z_C - z_A = k(z_B - z_A)$

$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R} \quad ; (A \neq B)$

Mesure de $(\vec{AB}, \vec{CD})$ est :

$(\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

A et B et C sont alignés équivaut à : $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \pi [2\pi]$ ou

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi]$

Remarque : $\left(\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi] \text{ ou } \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \pi [2\pi]\right)$

équivaut à $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv 0 [\pi]$

z_u et z_v affixes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a

$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \arg(z_u) - \arg(z_v) [2\pi]$

ou

$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) [2\pi]$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut $\frac{z_u}{z_v} \in \mathbb{R} \quad (z_v \neq 0)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut $\Leftrightarrow \frac{z_v}{z_u} = bi ; (b \in \mathbb{R}^*) \quad (z_v \neq 0)$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

A et B et C et D sont alignés ou cocycliques équivaut à

$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \pi [2\pi] \text{ ou } \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [\pi]$

$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

Relation complexe

Signification géométrique

L'ensemble des M d'affixe z tel que : $|z - z_A| = |z - z_B|$

1. $AM = BM$. M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

2. L'ensemble des M c'est la médiatrice du segment $[AB]$.

$|z - z_A| = k \quad (k > 0)$

1. $AM = k$

2. M appartient au cercle de centre A et de rayon k .

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2}\right] = re^{\pm \frac{\pi}{2}i}$

• Si $r \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ alors ABC est un triangle rectangle en A .

• Si $r = 1$ alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A .

$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$

ABC est un triangle isocèle en A .

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3}\right] = e^{\pm \frac{\pi}{3}i}$

ABC est un triangle équilatéral .