

L'ensemble $\mathbb{C}$ -L'écriture algébrique :

- ✓ L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$
- ✓ Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique $z = x + iy \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $i^2 = -1$
- ✓ L'écriture $x + iy$ appelée la forme algébrique de z
- ✓ Le nombre x appelé la partie réel de z et noté $Re(z)$
- ✓ Le nombre y appelé la partie imaginaire de z et noté $Im(z)$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$$

✓ Si $Im(z) = 0$ alors z est un réel

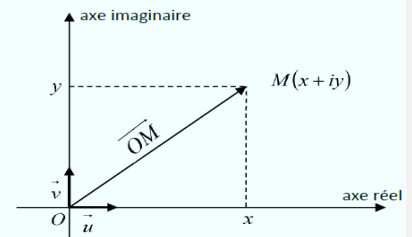
✓ Si $Re(z) = 0$ et $Im(z) \neq 0$ alors z est un imaginaire pur

La représentation géométrique d'un nombre complexe

le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- ✓ Le point $M(x, y)$ appelé image de z noté $M(z)$
- ✓ Le nombre z appelé affixe de M et noté z_M
- ✓ Le nombre z appelé affixe de $\overrightarrow{OM}$ et noté $z = aff(\overrightarrow{OM})$
- ✓ L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$



La notion	La relation complexe
I le milieu de $[AB]$	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
A et B et C points alignés	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

Le conjugué d'un nombre complexe

Définition

soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$

Propriétés

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n \quad n \in \mathbb{N}^*$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad z \neq 0$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad z' \neq 0$

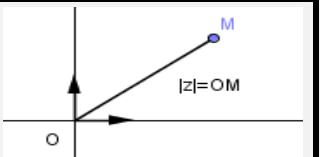
- z un nombre réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$
- z un imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$
- $z + \bar{z} = 2Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2i Im(z)$
- $z\bar{z} = x^2 + y^2$

Le module d'un nombre complexe

Définition

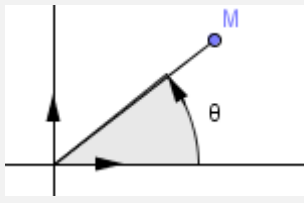
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Le module de z est le nombre réel positive $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriétés	$ z \times z' = z \times z' $ $ \bar{z} = z $ $\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$	$ z^n = z ^n$ $ -z = z $ $\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }$	$ z = OM$	
------------	--	---	------------	--

La distance AB $AB = |z_B - z_A|$

L'argument d'un nombre complexe-la forme trigonométrique

Définition	L'argument de z est tout mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{OM})$ (M est l'image de z) et noté $\arg(z)$ $\arg(z) = \theta[2\pi]$	
------------	---	---

cas particulières	$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$ $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(iz) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$	$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$ $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(iz) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$
-------------------	---	--

Mesure de l'angle $(\vec{AB}, \vec{CD})$ $(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

La forme trigonométrique	Soit z un complexe $\arg(z) = \theta[2\pi]$ et $z = r$ La forme trigonométrique de z est : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$
--------------------------	---

La forme exponentielle	Soit z un complexe $\arg(z) = \theta[2\pi]$ et $z = r$ La forme exponentielle de z est : $z = re^{i\theta}$	Autre notation $re^{i\theta} = [r, \theta]$
------------------------	--	---

Propriétés	$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$ $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$	$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$ $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$ $\arg(zz') \equiv (\arg(z) + \arg(z'))[2\pi]$ $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi]$ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$
------------	--	--

Formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formule de Moivre :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Points cocyclique

A et B et C et D des points cocyclique si

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$$

L'ensemble des points $M(z)$ qui vérifient

$$|z - z_A| = r$$

$$\Leftrightarrow AM = r$$

La notion géométrique

Cercle de centre A et de rayon r

$$|z - z_A| = |z - z_B|$$

$$\Leftrightarrow AM = BM$$

la médiatrice de $[AB]$

Nature du triangle

ABC triangle rectangle en A

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = re^{\pm i\frac{\pi}{2}}$$

ABC triangle isocèle en A

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\theta}$$

ABC triangle isocèle et rectangle en A

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$$

ABC triangle équilatérale

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a et b et c des réels)

L'équation $z^2 = a$
 $z \in \mathbb{C}$

Solutions

$$a > 0$$

$$S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$$

$$a = 0$$

$$S = \{0\}$$

$$a < 0$$

$$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$

$a \neq 0$ et $z \in \mathbb{C}$

On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac$

Solutions

$$\Delta > 0$$

$$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

$$\Delta = 0$$

$$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

$$\Delta < 0$$

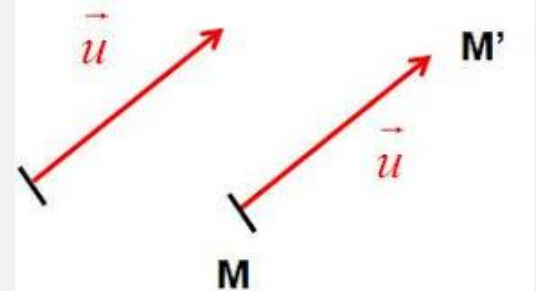
$$S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$$

Ecriture complexe des transformations géométriques

$$M(z), M'(z')$$

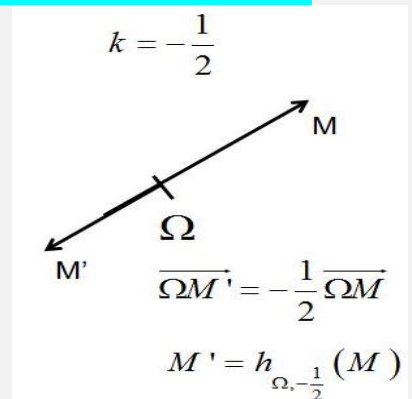
$T_{\vec{u}}$: T translation de vecteur $\vec{u}$

$$\begin{aligned} T(M) = M' &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \\ &\Leftrightarrow z' - z = z_{\vec{u}} \\ &\Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}} \end{aligned}$$



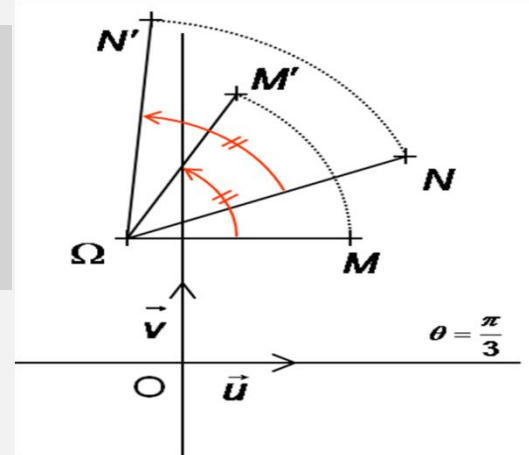
$h(\Omega, k)$: h homothétie de centre Ω et de rapport k

$$\begin{aligned} h(M) = M' &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \\ &\Leftrightarrow z' - z_{\Omega} = k(z - z_{\Omega}) \\ &\Leftrightarrow z' = k(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega} \end{aligned}$$



$R(\Omega, \theta)$: R rotation de centre Ω et d'angle θ

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\Leftrightarrow z' - z_{\Omega} = e^{i\theta}(z - z_{\Omega}) \\ &\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega} \end{aligned}$$



N.B : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

En résumé :

La transformation	L'écriture complexe
La translation T de vecteur $\vec{u}$	$z' = z + z_{\vec{u}}$
L'homothétie h de centre Ω et de rapport k	$z' = k(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega}$
La rotation R de centre Ω et d'angle θ	$z' = e^{i\theta}(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega}$