**Exercices d'applications et de réflexions :** *fonctions exponentielles*

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

# FONCTIONS EXPONENTIELLES

**Exercice1 :** Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

1) $\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right)=\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ 2) $\exp(2x+1)\leq\exp\left(\frac{6}{x}\right)$

**Exercice2 :** Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e$ 2) $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}$

3) $e^{2x}-5e^{x}+6=0$ 4) $e^{x^2}\cdot\left(e^{x}\right)^3=\left(e^{-x}\right)^5\cdot e^{-7}$

5) $e^{2x-3}-(e+1)e^{x-2}+1\prec 0$

**Exercice3 :** Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+3}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+3x}{x^3}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{x}+1}{e^{x}+2}$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+1}$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}+e^{-x}$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}$ 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-e^{x}$ 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-1}{x^2}$ 12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^2+3x}$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^3-e^{x}$ 14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+3x}{x^3}$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}$ (on pose : $2x=X$ ) 16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3+x+1}$ 18) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-1)e^{x}$

19) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-4x^3\right)e^{x}$ 20) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

21) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x\right)e^{2x}$ 22) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$

23) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ 24) $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}$

25) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}$ 26) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e}{x}$

**Exercice4 :** Déterminer les dérivées des fonctions suivantes : 1) $f(x)=e^{\sqrt{2x+1}}$

2) $g(x)=e^{-2x^2}-3e^{3x+1}$ 3) $h(x)=e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x)=\left(e^{x}-4\right)\sqrt{e^{x}-1}$

**Exercice5 :** Déterminer les primitives des fonctions suivantes : 1) $f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

2) $g(x)=\left(e^{x}\right)^2$ 3) $h(x)=\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$

**Exercice6** : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $I=\mathbb{R};\ f(x)=2e^{3x}-e^{-x}$

2) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$

3) $I=\mathbb{R};\ f(x)=e^{x}\left(e^{x}-1\right)^3$

4) $I=[0;\pi];\ f(x)=\sin x e^{\cos x}$

5) $f(x)=\frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$ $I=]0;+\infty[$

**Exercice7 :** Considérons la fonction $f$ définie par : $f(x)=(x-1)e^{x}$

1)Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.
2) Etudier les branches infinies de la courbe $Cf$ au voisinage de $+\infty$
3) Etudier la concavité de la courbe $Cf$
4) Construire la courbe $C_f$.

**Exercice8 :** Considérons la fonction $f$ définie par : $f(x)=x-1+\dfrac{3}{e^{x}+1}$

1)déterminer $D_f$ et calculer les limites aux bornes de $D_f$

2)Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.

3)montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}); f(x)=x+2-\dfrac{3e^{x}}{e^{x}+1}$

4) Etudier les branches infinies de la courbe $Cf$
Et étudier la position de la courbe $Cf$ avec les asymptotes obliques

**Exercice9 :** Considérons la fonction $f$ définie par : $f(x)=\left(e^{x}-4\right)\sqrt{e^{x}-1}$

1)déterminer $D_f$ et calculer les limites aux bornes de $D_f$

2)montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_{*}^{+}\right)\ \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{e^{x}-4}{\sqrt{e^{x}-1}}\cdot\dfrac{e^{x}-1}{x}$

3) Etudier la dérivabilité de la fonction $f$ à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

4) montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_{*}^{+}\right)\ f'(x)=\dfrac{3e^{x}\left(e^{x}-2\right)}{2\sqrt{e^{x}-1}}$

5)Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.
6) Etudier les branches infinies de la courbe $C_f$
Au voisinage de $+\infty$

7)calculer : $f(2\ln 2)$ et construire la courbe $C_f$.

**Exercice10:** Considérons la fonction $f$ définie par : $f(x)=\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}$

1)déterminer $D_f$ et calculer les limites aux bornes de $D_f$

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f$ à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu
3)Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.
4) construire la courbe $C_f$.

**Exercice11 :** Considérons la fonction $f$ définie par : $f(x)=\dfrac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

1)déterminer $D_f$ et calculer les limites aux bornes de $D_f$

2)Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.
3) montrer que $f$ admet une fonction réciproque définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera
4) déterminer : $f^{-1}(x)\quad \forall x\in J$

**Exercice12 :** Considérons la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$ et soit $(C)$ la courbe De $f$ dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,\right)$

1)a)montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et interpréter géométriquement le résultat

b) montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2)a)vérifier que: $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)=x+1-\ln\left(1+e^{x}\right)$

b) en déduire la droite $(D)$ d'équation : $y=x+1$ est une asymptote oblique a la courbe $Cf$ au voisinage de $-\infty$
c) étudier la position de la courbe $Cf$ avec la droite $(D)$

3)a) montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$

b) Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.
c) Etudier la concavité de $Cf$
d) montrer que la courbe $Cf$ coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer
4) Construire la courbe $C_f$ dans le repére $\left(O;\vec{i}\ \vec{j}\right)$
5) a)montrer que $f$ admet une fonction réciproque définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera
b) déterminer : $f^{-1}(x)\quad \forall x \in J$

**Exercice13 :**
*Partie 1 :* Considérons la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}+$ par : $f(x)=(x+2)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$
1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f$ à droite de 0.
2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3) Déterminer la limite en $+\infty$
4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction $f$ puis dresser le tableau de variation de $f$.
5) a) Montrer que $(\forall t>0)$ $0 \prec e^{-t}+t-1 \prec \frac{t^2}{2}$
b) En déduire que : $(\forall x>0)$
$$\frac{-4}{x} \prec f(x)-x \prec \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$$
c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $Cf$ au voisinage de $+\infty$
6) Construire la courbe $C_f$.
*Partie 2 :*
Considérons la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$f_n(x)=(x+2n)e^{\frac{-2}{x}}$$ si $x>0$ et $f_n(0)=0$ où $n \in \mathbb{N}^*$
1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f_n$ à droite de 0.
b) Déterminer la limite en $+\infty$
c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction $f_n$ puis dresser le tableau de variation de $f_n$.
2) Montrer que l'équation $f_n(x)=\frac{2}{n}$ admet une solution unique $\alpha_n$ dans $]0,+\infty[$
3)a) Montrer que $(\forall x>0)$
$$f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1} \succ f_n(x)-\frac{2}{n}$$
b) En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_n$
c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et que $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n)_n=0$

**Exercice14 :** Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ :
1) $5^x=15$ 2) $3^{2x} \ge 5^{1-x}$ 3) $7^{x+1}-7^{-x} \prec 6$

**Exercice15 :** Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ :
1) $2^{x+1}=8^x$ 2) $3^x=12$ 3) $5\times 2^x+2^{x+1}-336=0$
4) $100^x+40=14\times 10^x$
5) $2^{x-1}>4^x$ 5) $(0{,}5)^{2x} \ge (0{,}5)^{x+1}$

**Exercice16:** Déterminer les primitives de la fonction suivante : $f(x)=3^{x-2}$

**Exercice17:** Soit La fonction $f$ définie par :
$f(x)=4^x-2^{x+1}$ 1)déterminer $D_f$
2) calculer les limites aux bornes de $D_f$
3)Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.
4) Etudier les branches infinies de la courbe $Cf$
5) construire la courbe $C_f$ dans un repére $\left(O;\vec{i}\ \vec{j}\right)$

**Exercice 18:** Soit La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f$: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$x \to x^x$ , si $x \neq 0$ et $f(0)=0$
1)Etudier la continuité de la fonction $f$ à droite de 0.
2)Etudier la dérivabilité de la fonction $f$ à droite de 0.
3)Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.

4)Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $Cf$ au voisinage de $+\infty$.

5)Tracer la courbe $Cf$.

6)Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$

7)Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = \frac{1}{e}$

et $(\forall n \in \mathbb{N})$( $u_{n+1} = f(u_n)$).

a)Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$( $u_n \leq 1$)

b)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$ ; puis en déduire qu'elle convergente.

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

**Exercice 19 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ; considérons la fonction $f_n$ définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

et $(C_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner le tableau de variation de $f_1$.

2. Déterminer l'équation de la tangente $(T_1)$ à la courbe $(C_1)$ en point d'abscisse 1.

3. Construire la courbe $(C_1)$ et la tangente $(T_1)$ dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction $f_n$.

5. a) Etudier sur l'intervalle $[1, +\infty[$ le signe de :

$f_2(x) - f_1(x)$

b) En déduire les positions relatives des deux courbes $(C_1)$ et $(C_2)$ ; puis construire $(C_2)$

6. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ où $u_n$ est la valeur maximale de la fonction $f_n$.

a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ : $u_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$

b) Pour $x \in ]1, +\infty[$ ; calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ($u_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}})$ )

d) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ($u_n \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^n}$ )

Et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien*