

Exercice 1 :

⌚ 1^{ère} partie :

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = (2-x)e^{-x} + 1$

- ① - a - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- b - Etudier les variations de la fonction g .
- ② - En déduire que : $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

⌚ 2^{ème} partie :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x-1)e^{-x} + x$.

- ① - Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② - Etudier les variations de f .
- ③ - a - Etudier les branches infinies de courbe (\mathcal{C}_f)
b - Etudier les positions relatives de la courbe (\mathcal{C}_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.
- ④ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 2 :

⌚ 1^{ère} partie :

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^x - 2x + 2$

- ① - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ② - a - Etudier le signe de $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire les variations de la fonction g (le calcul des limites n'est pas demandé).
b - En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

⌚ 2^{ème} partie :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = xe^{-x} + \frac{x}{2} + 1$.

- ① - a - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.
b - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \right]$ et interpréter le résultat graphiquement.
c - Etudier les positions relatives de la courbe (\mathcal{C}_f) et la droite (Δ) d'équation :

$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

- ② - a - Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{2e^x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b - Dresser le tableau de variations de f .

- ③ - a - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-1; 0[$

b - Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse 0 .

④ - Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis déterminer le point d'inflexion de la courbe (\mathcal{C}_f)

⑤ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prends $e \approx 2,7$ et $\frac{2}{e^2} \approx 0,27$).

Exercice 3 :

① 1^{ère} partie :

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^x - x$

① - Etudier les variations de la fonction g .

② - En déduire le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} .

② 2^{ème} partie :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{xe^x - 1}{e^x - 1}$.

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_f .

② - a - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ et interpréter le résultat graphiquement.

b - Etudier le signe de $f(x) - x$ sur \mathbb{R}_+^* .

c - En déduire la position relative de la courbe (\mathcal{C}_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

③ - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, puis dresser le tableau de variations de f .

④ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 4 :

① 1^{ère} partie :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^x + 1}$.

① - a - Vérifier que : $1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x} + 1}$.

b - Etudier la parité de f et interpréter les résultats graphiquement.

② - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right]$ et interpréter le résultat graphiquement.

③ - a - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de f sur \mathbb{R}^+ .

b - En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : 1 - \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{x}{2}$.

④ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

② 2^{ème} partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \frac{1}{e^{u_n} + 1} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$.

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$.

② - Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$ puis en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

③ - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$ et déterminer sa limite.