

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1:

- 1) Simplifier les expressions suivantes.

$$A = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$

$$B = (e^x - e^{-x})^2 (e^{2x} + e^x + 1)$$

- 2) Montre que pour tout x de \mathbb{R} on a :

$$\bullet \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{1 - e^x}{e^x + 1}$$

$$\bullet \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$$

Exercice 2:

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

1) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

2) $e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0$

3) $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$

Exercice 3:

Résolvez dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

1) $e^{2x} + e^x - 2 < 0$

2) $e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$

3) $\frac{e^x - 1}{e^x - 2} > 0$

Exercice 4: calculer les limites suivantes.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + x}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \cdot e^{-x}$$

$$D = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - e^x$$

$$E = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x)e^x$$

$$F = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x)e^{-x}$$

$$G = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^x - 1)$$

$$H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x + 1}$$

Exercice 5:

Démontrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , puis calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants.

1) $f(x) = x \cdot e^{\sqrt{x}}$

2) $f(x) = e^{-x} \cdot \ln x$

3) $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$

4) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

Exercice 6 :

Déterminer une primitive F de la fonction f sur I .

1) $f(x) = e^{-x+1}$; $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \frac{1}{e^{-x} + 1}$; $I = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$; $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$; $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$; $I = \mathbb{R}$

6) $f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 7 :

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x par:

$$f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$$

- 1) Déterminer la dérivée seconde de la fonction f .

- 2) Vérifier que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$$

- 3) Déterminer une primitive de la fonction f .

Exercice 8:

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x par:

$$f(x) = x + \frac{4}{1+e^x}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- 2) a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x} \right)^2$

b) Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

c) En déduire que $I(0; 2)$ est un point d'inflexion.

- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ et interpréter

graphiquement le résultat trouvé.

- 4) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 4$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

- 5) Etudier la position relative de (C_f) et (D) .

- 6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans \mathbb{R} , et que $-4 < \alpha < -3$.

- 7) En déduire que : $e^\alpha = -1 - \frac{4}{\alpha}$.

- 8) Tracer la courbe (C_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 9:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par:

$$f(x) = (e^{-x} - 1)^2$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans

un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité: 2cm)

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, et interpréter graphiquement le résultat.

- 2) Montrer que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique de (C_f) au voisinage de $-\infty$.

- 3) a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-2x})$$

b) Dresser le tableau de variation de f .

- 4) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion.

- 5) Soit g la restriction de la fonction f sur $[0; +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}

b) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}; x \geq 0): g^{-1}(x) = -\ln(1 - \sqrt{x})$

- 6) Tracer (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 10 : (Sujet 2019 Rattrapage)

Première partie: Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par:

$$f(x) = 2 + 8 \left(\frac{x-2}{x} \right) e^{x-4}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (L'unité: 1cm)

- 1) a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, et interpréter graphiquement le résultat.
b) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, et interpréter graphiquement le résultat.
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b) Montrer que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 3) a) Montrer que pour tout x de \mathbb{R}^* on a:
$$f'(x) = \frac{8(x-2)(x^2 - 2x + 4)e^{x-4}}{x^3}$$

b) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - 2x + 4 > 0$
c) Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; 2]$, et strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; 0]$ et $[2; +\infty[$.
d) Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R}^* .
- 4) Tracer (C_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 5) a) Vérifier que la fonction $H: x \mapsto \frac{1}{x} e^{x-4}$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto \frac{x-1}{x^2} e^{x-4}$ sur l'intervalle $[2; 4]$.
b) Vérifier que
$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32 \frac{(x-1)}{x^2} e^{x-4}$$

c) Calculer l'intégrale $\int_2^4 e^{x-4} dx$.
d) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=4$.

Deuxième partie :

- 1) Soit g la fonction définie sur $[2; 4]$ par:
$$g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$$

a) Calculer $g(4)$.
b) Vérifier que pour tout x de $[2; 4]$,
$$g(x) = -(x-4)^2 e^{x-4} + x^2 (e^{x-4} - 1)$$

c) Vérifier que pour tout x de $[2; 4]$: $e^{x-4} - 1 \leq 0$
puis en déduire que pour tout x de $[2; 4]$: $g(x) \leq 0$.
- 2) a) Vérifier que pour tout x de $[2; 4]$:

$$f(x) - x = \left(\frac{x-2}{x^2} \right) g(x)$$

b) En déduire que pour tout x de $[2; 4]$: $f(x) \leq x$.

3) On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} on a: $2 \leq u_n \leq 4$.
- b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n) , puis en déduire quelle est convergente.
- c) Calculer la limite de (u_n) .

Exercice 11 :

Partie A : On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 1 - (1+x)e^x$$

- 1) Dresser le tableau de variation de g .
- 2) Calculer $g(0)$. Puis en déduire le signe de $g(x)$.

Partie B : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$f(x) = x(1 - e^x)$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) Montrer que la droite $(D): y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.
Et préciser la position relative de (D) et (C_f) .
- 3) Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.
- 4) a) Montrer que pour tout réel x , on a: $f'(x) = g(x)$
b) Dresser le tableau de variation de f .
- 5) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I dont on déterminera ses coordonnées.
- 6) Construire (D) et (C_f) .

Partie C :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = -1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} on a: $-1 \leq u_n \leq 0$
- b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n) , puis en déduire quelle est convergente.
- c) Calculer la limite de la suite (u_n) .