Fonction exponentielle

I) *Fonction exponentielle népérienne.*

Activité :

1) Montrer que la fonction **ln** admet une fonction réciproque définie sur **IR**.

Définition: La fonction réciproque de la fonction **ln** est une fonction définie sur **IR** est appelée la fonction **exponentielle népérienne** ou **naturelle** et se note **exp** . donc $\exp(x)=y \Leftrightarrow x=\ln y$ avec $x\in IR$ *et* $y>0$

2) Calculer $\exp(0)$ *et* $\exp(1)$. $\boxed{e\approx 2,7182818284\ 59045235}$

3) déduire que la fonction **exp** est continue , dérivable et strictement croissante sur **IR**.

4) Etudier le signe de la fonction **exp** sur **IR**.

5) En déduire que pour tout couple $(a;b)$ de réels on a :

$$\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)\ ;\ \exp(a-b)=\frac{\exp a}{\exp b}\quad et\quad \exp(-a)=\frac{1}{\exp a}$$

6) Tracer la courbe de la fonction **exp** dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\exp x}{x}$.

8) Déterminer $\exp'(x)$ *et* $(\exp(u(x)))'$ tel que u une fonction dérivable .

9) Calculer $\lim\limits_{x\to0}\frac{\exp(x)-1}{x}$ et donner l'équation de la tangente de $(C_{\exp})$ au point $B(0;1)$.

10) Montrer que $(\forall r\in Q):\exp(r)=e^r$.

Conséquences

La fonction **exp** est définie, **continue** et **dérivable** sur **IR**, et pour tout réel on a :

$\exp(x)=e^x$ et $(e^x)'=e^x$.

- Le nombre e est un nombre irrationnel tel que:
- Si u est dérivable sur I, alors la fonction $x\mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(e^{u(x)})'=u'(x)e^{u(x)}$.

Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b , on a :

- $e^a\times e^b=e^{a+b}$
- $\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$ et $\frac{1}{e^a}=e^{-a}$
- $(e^a)^n=e^{na}$ $(n\in\mathbb{Z})$
- $e^{\ln b}=b$ avec $b>0$

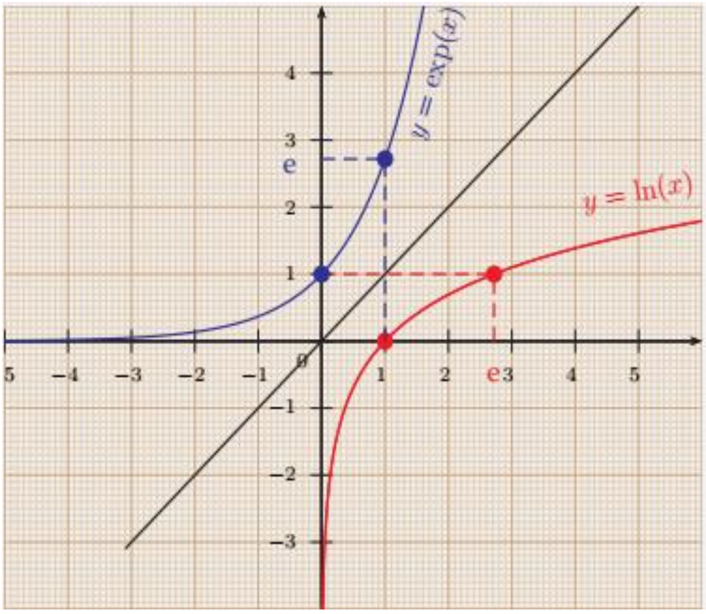
Equations et inéquations

Pour tous réels x et y , on a :

- $e^x>0$
- $e^x=e^y\Leftrightarrow x=y$
- $e^x<e^y\Leftrightarrow x<y$
- $e^x=y\Leftrightarrow\begin{cases}x=\ln y\\ y>0\end{cases}$

Limites $(n\in IN^*)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$



Définition :

On appelle fonction ***exponentielle***, la fonction réciproque de la fonction ***logarithme*** népérien. L'image d'un réel x par la fonction ***exponentielle*** est notée e^x

Corollaire **:** Si u est une fonction dérivable sur I, alors la fonction $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ admet des primitives de la forme : $x\mapsto e^{u(x)}+c$ où c est une constante réelle.

II) *Fonction exponentielle de base a avec* $a\in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Définition: La fonction réciproque de la fonction $\log_a$ est une fonction définie sur **IR** est appelée la fonction ***exponentielle de base a*** et se note $\exp_a$ tel que : $\exp_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$.

Dérivée de la fonction $x\mapsto a^x$: $(\forall x\in IR);\exp_a'(x)=(a^x)'=(e^{x\ln a})'=(\ln a).e^{x\ln a}=(\ln a).a^x$

Remarques : $\exp_e(x)=e^x$; $\log_e(x)=\ln x$; $\log_a(a)=1$; $\log_a(x)=\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ (*changement de base*)