

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1:

Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \ln(3 - \sqrt{3}) + \ln(3 + \sqrt{3}) \quad B = \ln e^3 - \ln \frac{2}{e} + \ln 2$$

$$C = 3 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 9 - 2 \ln(2\sqrt{6})$$

Exercice 2:

Résolvez dans \mathbf{IR} les équations suivantes.

- 1) $\ln x + \ln(3x + 2) = \ln(2x + 3)$
- 2) $\ln(x - 3) + \ln(x + 1) = \ln(x + 7)$
- 3) $4(\ln x)^2 - 4 \ln x - 3 = 0$

Exercice 3:

Résolvez dans \mathbf{IR} les inéquations suivantes.

- 1) $\ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0$
- 2) $4(\ln x)^2 - 4 \ln x - 3 \leq 0$

Exercice 4:

Déterminer le domaine de définition de la fonction f .

- 1) $f(x) = (\ln(x) - 2)\sqrt{4 - x}$
- 2) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$
- 3) $f(x) = \frac{2x}{1 - \ln x}$

Exercice 5:

Calculez les limites suivantes.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} & B &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{x} \\ C &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) & D &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 4x)}{x} \\ E &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1 + \frac{1}{x^2}) & F &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2) \ln x}{x^2 - 1} \\ G &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x & H &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x \end{aligned}$$

Exercice 6:

Démontrer que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et explicitez $f'(x)$.

- 1) $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$
- 2) $f(x) = \ln \sqrt{1 + 4x + x^2}$
- 3) $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{1+x}$
- 4) $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$

Exercice 7:

la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{\ln x}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

- 1) Montrer que f est continue sur $I = [1; +\infty[$.
- 2) a) Etudier la dérivable de f à droite en 1. et Interpréter géométriquement le résultat trouvé.
- b) Dresser le tableau de variation de f .

3) a) Déterminer l'intersection de $(\Delta): y = x$ et (C_f) .

b) Tracer (C_f) et (Δ) .

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $J = [0, +\infty[$.

b) Tracer la courbe (C_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

5) On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout n de \mathbf{IN} .

a) Montrer que pour tout n de \mathbf{IN} on a : $0 \leq u_n \leq e$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice 8:

Partie 1 : Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(1+x)$$

1) Dresser le tableau de variation de g .

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]-1; +\infty[$ deux solutions 0 et a et vérifier que $3,8 < a < 4$.

3) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$

4) Montrer que pour tout x de $]-1; +\infty[$, on a:

$$g(x) \leq 1$$

Partie 2 : Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f

dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

2) Etudier la dérivable de f à droite en 0.

3) Montrer que $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

4) Dresser le tableau de variation de f

5) vérifier que : $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.

6) Tracer la courbe (C_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 8:

Déterminer une primitive F de la fonction f sur I .

$$1) f(x) = \frac{3}{2x+1} ; \quad I = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

$$2) f(x) = \frac{4x-2}{x^2-x+1} ; \quad I = \mathbf{IR}.$$

$$3) f(x) = \frac{1}{x \ln x} ; \quad I =]1; +\infty[$$

$$4) f(x) = \frac{\ln x}{x} ; \quad I =]0; +\infty[$$

$$5) f(x) = \tan x ; \quad I = \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$$

Exercice 9:

Partie A: Soit g une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - x - 2\ln(x) + 1$$

1) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$ on a :

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

2) Etudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B: Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$

par : $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$, et (C_f) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité 2 cm)

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, et interpréter graphiquement.

3) Montrer que : $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, puis donner le tableau de variation de f .

4) Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

5) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = x + \ln x$$

a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; 1[$. Et vérifier que $e^{-\alpha} = \alpha$.

b) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) .

6) Construire (C_f) et (Δ) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

Exercice 10:

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(1 + x^2)$$

1) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

2) Préciser le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie B : Etude d'une fonction.

f est la fonction définie sur $I = [0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$, et interpréter géométriquement le résultat trouvé.

3) a) Vérifier que :

$$(\forall x > 0); f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. et interpréter le résultat trouvé géométriquement.

4) a) Démontrer que $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de f .

5) Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice 11:

Partie A: Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x + (x-2)\ln x$$

a) Montrer que : $(\forall x > 0); g'(x) = 2\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$

b) Etudier les variations de g . Puis en déduire que la fonction g est strictement positive.

Partie B: Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2 \text{ et } (C_f) \text{ désigne}$$

la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité 2 cm)

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement le résultat trouvé.

2) Montrer que (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées.

3) a) Vérifier que $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{g(x)}{x}$, et étudier les variations de f .

b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

4) a- Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

b- Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = x - 1 - \ln x$.

En déduire le signe de $h(x)$.

c- Montrer que $f(x) - x = (\ln x - 1)h(x)$ et en déduire la position de la courbe (C_f) par rapport à (T) .

5) Tracer les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .

De la même façon que personne n'est capable d'expliquer pourquoi les étoiles sont belles, c'est difficile d'exprimer la beauté des mathématiques

Yoko Ogawa