

Exercice 1 :

☺ 1^{ère} partie :

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = xe^x + 1$

① - a - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

b - Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction h .

② - En déduire le signe de $h(x)$ sur \mathbb{R} .

☺ 2^{ème} partie :

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x - e^x + 2$.

① - a - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

b - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction g .

② - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes α et β dans \mathbb{R} tel que $\alpha > \beta$, puis montrer que $1,14 < \alpha < 1,15$.

③ - En déduire le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} .

☺ 3^{ème} partie :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.

① - Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

② - a - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b - Etudier les variations de f , puis dresser la tableau de variation.

③ - a - Montrer que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

b - Donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} .

④ - Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse 0.

⑤ - a - Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) - x = \frac{(x+1) \times u(x)}{xe^x + 1}$, tel que : $u(x) = e^x - xe^x - 1$.

b - Etudier les variations de u sur \mathbb{R} .

c - En déduire le signe de u sur \mathbb{R} .

d - En déduire les positions relatives de la courbe (\mathcal{C}_f) et la droite (T) .

⑥ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(On prends $-1,85 < \beta < -1,84$ et $-1,19 < f(\beta) < -1,18 \frac{2}{e^2} \approx 0,27$).

Exercice 2 :

☺ 1^{ère} partie :

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x - 1 + e^{-x}$.

① - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction g .

② - Dresser le tableau de variations de g .

③ - a - Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geq 0$

b - Déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : x + e^{-x} \geq 1$.

⌚ 2^{ème} partie :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$.

① - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

② - Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$.

③ - a - Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b - interpréter graphiquement les résultats obtenus.

④ - a - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b - Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

⑤ - a - Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse 0.

b - Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x) + 1}$.

Puis étudier le signe de $x - f(x)$ sur \mathbb{R} .

c - En déduire les positions relatives de la courbe (\mathcal{C}_f) et la droite (T) .

⑥ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prends $\frac{1}{1-e} \approx -0,6$).

⌚ 3^{ème} partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$.

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$.

② - Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

③ - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

☞ Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x(e^{2x} - 1)}{e^{2x} + 1}$.

① - a - Vérifier que : $f(x) = \frac{x(1 - e^{-2x})}{1 + e^{-2x}}$.

b - Etudier la parité de f et interpréter les résultats graphiquement.

② - a - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b - Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.

c - En déduire les positions relatives de la courbe (\mathcal{C}_f) et la droite (Δ) .

- ③ - a - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b - Calculer $f'(0)$ et interpréter les résultats graphiquement.
c - Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+): e^{4x} - 1 \geq 0$.
d - En déduire le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R}^+ , puis dresser le tableau de variations de f .
- ④ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 4 :

① 1^{ère} partie : Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x + e^{-x}$.

- ① - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction g .
- ② - a - Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}): g(x) \geq 1$
b - Déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}): 1 + xe^x > 0$.

② 2^{ème} partie : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(1 + xe^x)$.

- ① - Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- ② - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu .
- ③ - a - Calculer $(\forall x \in D_f): f'(x)$.
b - Dresser le tableau de variations de f sur D_f .
- ④ - a - Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*): f(x) = x + \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$.
b - Etudier la branche infinie de la courbe (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.
- ⑤ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 5 :

① 1^{ère} partie : Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.

- ① - Déterminer D_g , puis calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$.
- ② - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in D_g$, puis étudier les variations de la fonction g .
- ③ - a - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[e+1; e^3+1]$.
b - Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $[1; \alpha]$ et $[\alpha; +\infty[$.

② 2^{ème} partie : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$.

- ① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_f .
- ② - a - Calculer $(\forall x \in D_f): f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
b - Montrer que : $(\forall x \in D_f): f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.
- ③ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 6 :

1^{ère} partie :

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = e^x + 2x - e^{-x}$.

- ① - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in [0;+\infty[$.
- ② - Dresser le tableau variations de la fonction g .
- ③ - Déduire que : $(\forall x \in [0;+\infty[) : g(x) > 0$.

2^{ème} partie :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - \frac{2x}{1+e^x}$.

- ① - Déterminer D_f .
- ② - a - Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{2x}{e^{-x}+1} = 2x - \frac{2x}{1+e^x}$.
- b - Etudier la parité de f .
- ③ - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- ④ - a - Montrer que : $(\forall x \in D_f) : f'(x) = \frac{g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$.
- b - Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
- c - Dresser le tableau de variations de f sur D_f .
- ⑤ - a - Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.
- b - Etudier les positions relatives de la courbe (\mathcal{C}_f) et la droite (Δ) .
- ⑥ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3^{ème} partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \ln 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$.

- ① - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$.
- ② - Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- ③ - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.