

FONCTIONS LOGARITHMIQUES

I) LA FONCTION LOGARITHME NEPERIENNE

1) Fonction logarithme Népérienne

1.1 Définition et propriétés algébrique :

Définition : La fonction logarithme népérienne est

la fonction primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur

$]0, +\infty[$ et qui s'annule en 1 ; on la note par $\ln$.

Conséquences immédiates :

- 1) $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$
- 2) $f(x) = \ln(u(x))$ est définie si et seulement si $u(x) > 0$
- 3) $\ln(1) = 0$
- 4) $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

et $(x \in]0, +\infty[) (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Monotonie : On a : $(x \in]0, +\infty[) (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$

Donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur

$]0, +\infty[$ on a donc 1) $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

2) $\ln(a) \leq \ln(b) \Leftrightarrow a \leq b$

Applications1 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \rightarrow \ln(x+1)$ 2) $g : x \rightarrow \ln(x^2 - 3x + 2)$

3) $h : x \rightarrow \frac{x}{\ln x}$ 4) $k : x \rightarrow \ln x + \ln(x-1)$

5) $k : x \rightarrow \ln x + \ln(x-1)$ 6) $m : x \rightarrow \ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

solution : 1) $f(x) = \ln(x+1)$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0\}$$

$$x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \text{ donc : } D_f =]-1, +\infty[$$

2) $g(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 > 0\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{3+1}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{3-1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
x^2-3x+2	+	0	-	0	+

$$\text{Donc : } D_g =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$$

3) $h(x) = \frac{x}{\ln x}$ $D_h = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0\}$

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ donc : } D_h =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

5) $k : x \rightarrow \ln x + \ln(x-1)$

La fonction est définie ssi $x > 0$ et $x-1 > 0$ cad

$$x > 0 \text{ et } x > 1 \text{ donc : } D_k =]1; +\infty[$$

6) $m : x \rightarrow \ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

La fonction est définie ssi $\frac{x-4}{x+1} > 0$ et $x+1 > 0$

On utilisant le tableau de signe on trouve :

$$D_m =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$$

Applications2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

et inéquations suivantes : 1) $\ln(x-2) = 0$

2) $\ln(3x-1) = \ln(5x-10)$ 3) $\ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0$

4) $\ln(2x) = \ln(x^2 + 1)$ 5) $\ln(2x-6) \geq 0$

6) $\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0$

Solution : 1) $\ln(x-2) = 0$

a) cette équation est définie ssi : $x-2 > 0$

$$x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \text{ donc : } D_E =]2; +\infty[$$

b) Résoudre l'équation :

$$\ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-2) = \ln(1) \Leftrightarrow x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow x \in D_E$$

$$\text{Donc : } S = \{3\}$$

$$2) \ln(3x-1) = \ln(5x-10)$$

a) cette équation est définie ssi : $5x-10 > 0$ et

$$3x-1 > 0 \text{ cad } x > \frac{1}{3} \text{ et } x > \frac{1}{3} \text{ donc : } D_E =]\frac{1}{3}; +\infty[$$

b) Résoudre l'équation :

$$\ln(3x-1) = \ln(5x-10) \Leftrightarrow 3x-1 = 5x-10 \Leftrightarrow -2x = -9$$

$$\text{Donc : } \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \in D_E \text{ donc : } S = \left\{ \frac{9}{2} \right\}$$

$$3) \ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0$$

a) cette équation est définie ssi : $2x-1 > 0$ et

$$1-x > 0 \text{ cad } x > \frac{1}{2} \text{ et } x < 1$$

$$\text{donc : } D_E = \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$$

b) Résoudre l'équation :

$$\ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x-1) = \ln(1-x)$$

$$2x-1 = 1-x \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \in D_E$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

$$4) \ln(2x) = \ln(x^2 + 1)$$

a) cette équation est définie ssi : $2x > 0$ et

$$x^2 + 1 > 0 \text{ cad } x > 0 \text{ donc : } D_E =]0; +\infty[$$

$$\ln(2x) = \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in D_E \text{ Donc : } S = \{1\}$$

$$5) \ln(2x-6) \geq 0$$

a) cette équation est définie ssi : $2x-6 > 0$

$$2x-6 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \text{ Donc : } D_E =]3; +\infty[$$

b) Résoudre l'inéquation :

$$\ln(2x-6) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(2x-6) \geq \ln 1 \Leftrightarrow 2x-6 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7}{2}; +\infty \right[$$

$$\text{donc : } S = \left[\frac{7}{2}; +\infty \right[\cap]3; +\infty[= \left[\frac{7}{2}; +\infty \right[$$

$$6) \ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0$$

a) cette équation est définie ssi : $x-1 > 0$ et

$$3x+1 > 0 \text{ cad } \left(x > -\frac{1}{3}; x > 1 \right) \text{ donc } D_I =]1; +\infty[$$

b) Résoudre l'inéquation :

$$\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) < \ln(3x+1)$$

$$x-1 < 3x+1 \Leftrightarrow 2x > -2 \Leftrightarrow x > -1$$

$$\text{Donc : } S =]-1; +\infty[\cap]1; +\infty[\text{ donc : } S =]1; +\infty[$$

La propriété caractéristique :

$$(\forall x > 0; \forall y > 0)(\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y))$$

Règles de calculs :

- $(\forall x > 0)(\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x))$
- $(\forall x > 0; \forall y > 0)(\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y))$
- $(\forall x > 0; \forall r \in \mathbb{Q})(\ln(x^r) = r \ln(x))$
- $(\forall a > 0) \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$
- $(\forall a > 0) \ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a \quad \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

Exemples : On pose $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$

Calculer: $\ln(6)$; $\ln(4)$; $\ln(8)$; $\ln(72)$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) ; \ln\left(\frac{3}{2}\right) ; \ln(\sqrt{2}) ; \ln(\sqrt{6}) ; \ln(3\sqrt{2})$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) ; A = \ln\sqrt{2+\sqrt{2}} + \ln\sqrt{2-\sqrt{2}} ;$$

$$B = \frac{1}{4} \ln 81 + \ln \sqrt{3} - \ln \frac{1}{27} \text{ et } C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2015} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2019}$$

Solution :

$$\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3) \approx 0,7 + 1,1 \approx 1,8$$

$$\ln(4) = \ln(2 \times 2) = \ln(2^2) = 2 \ln(2) \approx 2 \times 0,7 \approx 1,4$$

$$\ln(8) = \ln(2 \times 2 \times 2) = \ln(2^3) = 3 \ln(2) \approx 3 \times 0,7 \approx 2,1$$

$$\ln(72) = \ln(3^2 \times 2^3) = \ln(3^2) + \ln(2^3) = 2 \ln(3) + 3 \ln(2)$$

$$\ln(72) \approx 2 \times 1,1 + 3 \times 0,7 \approx 2,2 + 2,1 \approx 4,3$$

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(3) - \ln(2) \approx 1,1 - 0,7 \approx 0,4$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \approx -0,7$$

$$\ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2} \ln(6) \approx \frac{1}{2} \times 1,8 \approx 0,9$$

$$\ln(3\sqrt{2}) = \ln(3) + \ln(\sqrt{2}) \approx 1,1 + \frac{1}{2} \ln(2) \approx 1,1 + \frac{0,7}{2} \approx 1,1 + 0,35 \approx 1,45$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) = \ln(3 \times 2^2) + \ln(\sqrt[3]{3}) = \ln(3) + 2\ln(2) + \ln\left(3^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) = \ln(3) + 2\ln(2) + \frac{1}{3} \ln(3) \approx 1,1 + 1,4 + \frac{1}{3} \times 1,1 \approx 2,86$$

$$A = \ln\sqrt{2+\sqrt{2}} + \ln\sqrt{2-\sqrt{2}} = \ln\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right) = \ln\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\right)$$

$$A = \ln\left(\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2}\right) = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,35$$

$$B = \frac{1}{4} \ln 81 + \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{27} = \frac{1}{4} \ln 3^4 + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln\frac{1}{3^3} = \frac{4}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3 + 3 \ln 3$$

$$B \approx 1,1 + \frac{1,1}{2} + 3 \times 1,1 \approx 4,95$$

$$C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2015} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2019} = \ln\left((\sqrt{2}+1)^{2019} \times (\sqrt{2}-1)^{2019}\right)$$

$$C = \ln\left((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right)^{2019} = \ln\left((\sqrt{2})^2 - 1^2\right)^{2019} = 2019 \ln(1) = 2019 \times 0 = 0$$

Exercice1 : On pose $\alpha = \ln(a)$ et $\beta = \ln(b)$

Calculer en fonction de α et β les réels suivants :

$$\ln(a^2 b^5) \text{ et } \frac{1}{\sqrt[6]{a^7 b}}$$

Solution :

$$\ln(a^2 b^5) = \ln(a^2) + \ln(b^5) = 2 \ln a + 5 \ln b = 2\alpha + 5\beta$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7 b}}\right) = \ln\left(a^{-\frac{7}{6}} b^{-\frac{1}{6}}\right) = \ln a^{-\frac{7}{6}} + \ln b^{-\frac{1}{6}} = -\frac{7}{6} \ln a - \frac{1}{6} \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7 b}}\right) = -\frac{7}{6} \alpha - \frac{1}{6} \beta$$

1.2 Etude et représentation :

D'après la définition de la fonction $\ln$ on peut conclure que :

1.2.1) $\ln$ est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $]0, +\infty[$

1.2.2) **Déterminons des limites référentielles :**

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = ?$

Soit A un réel strictement positif. Comme la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que $\ln(1) = 0$ alors : $\ln(2)$ est un réel strictement positif. Par conséquent, le quotient : $\frac{A}{\ln 2}$ est un réel strictement positif.

On appelle n le plus petit entier naturel tel que :

$$n \geq \frac{A}{\ln 2} \text{ (il suffit de prendre } n = E\left(\frac{A}{\ln 2}\right) + 1)$$

On multiplie par $\ln 2$ qui est positif on aura :

$$n \ln 2 \geq A \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq A$$

Comme $\ln$ est une fonction croissante, alors pour tout x tel que $x \geq 2^n$ nous avons : $\ln x \geq n \ln 2 \geq A$

Donc $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(x \geq B \Rightarrow \ln x > A)$:

$$(B = \ln 2^n \text{ où } n = E\left(\frac{A}{\ln 2}\right) + 1) \text{ Donc : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty}$$

b) Déterminons : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

On pose : $t = \frac{1}{x}$ si $x \rightarrow 0^+$ alors $t \rightarrow +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{t} = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = -\infty$

donc : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty}$

La droite $(\Delta): x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe $(C_{\ln})$

c) Déterminons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = ?$

En utilisant le T.A.F de la fonction $\ln$ sur $I = [1; \sqrt{x}]$

On va montrer que : $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$

En effet la fonction $\ln$ est continue, dérivable sur I
D'après le T.A.F on donc :

$$\ln \sqrt{x} - \ln \sqrt{1} = \frac{1}{c} (\sqrt{x} - 1) \leq \sqrt{x} - 1$$

Donc : $\ln x \leq 2(\sqrt{x}-1)$ Donc : $0 < \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$

Et puisque on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$

(à vérifier) alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Donc la courbe $(C_{\ln})$ admet une branche parabolique vers l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

Propriété :1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ (où $r \in \mathbb{Q}_*^+$)

5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$ (où $r \in \mathbb{Q}_*^+$) 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Preuve : 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ où $(n \in \mathbb{N}^*)$?

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} = 0 \times 0 = 0$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) ?

Montrons d'abord que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$?

On pose $t = \frac{1}{x}$ si $x \rightarrow 0^+$ alors $t \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{\ln t}{t} = 0^-$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} x \ln x = 0 \times 0 = 0$

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$?

La fonction $\ln$ étant dérivable en 1 alors :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = 1$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$?

On pose : $t = x + 1$ et on applique : 6)

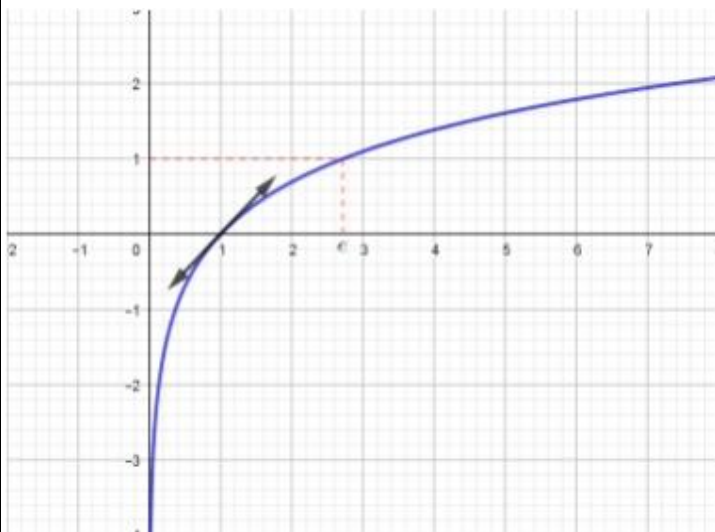
1.2.3) Le nombre e :

La fonction $\ln$ est continue strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $\ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$, donc le réel 1 a un antécédent noté e (le nombre népérien) : $\ln(e) = 1$

1.2.4) Le Tableau de variation et La courbe

$(C_{\ln})$: $(C_{\ln})$ à une tangente en $A(1,0)$: $(T): y = x - 1$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'x$			+	
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



Exemple1 : simplifier et calculer :

$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9)$$

Solution :

$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln(e) + 4\ln(e) - (-\ln(e))$$

$$A = 2 \times 1 + 4 \times 1 - (-1) = 7$$

$$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9) = 2 \times \frac{1}{2}\ln(e) + \ln e + \ln(\sqrt{e}) - \frac{1}{3}9\ln(e)$$

$$B = 1\ln(e) + \ln e + \frac{1}{2}\ln(e) - 3\ln(e) = 1 + 1 + \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Exemple2: Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x) + 1}{\ln x}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2(x) - \ln x)$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln x$

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x$

5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x$

7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - x^3 \ln x$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln(x))^2$ on pose : $X = \sqrt{x}$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x-1} \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln x)^5$$

Solution : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x} ?$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) + 1 = 2 \times (+\infty) + 1 = +\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc forme indéterminé (FI)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \left(2 + \frac{1}{\ln x} \right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{\ln x} = 2 + 0 = 2$$

(car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$)

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2(x) - \ln x) ?$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x (\ln(x) - 1) = +\infty$$

(car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$)

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x ?$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

(car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$)

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x (\ln(x) + 1) = -\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + 1 = -\infty$

5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x \ln x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)

7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - x^3 \ln x = 0$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ on pose : $X = \frac{1}{x}$

$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{0^+} \frac{1}{X} \ln(1 + X) = \lim_{0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2$ on pose : $X = \sqrt{x}$

$X = \sqrt{x} \Leftrightarrow X^2 = (\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow X^2 = x$

$x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} X^2 (\ln(X^2))^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} X^2 (2 \ln X)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 X^2 (\ln X)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} (X \ln X)^2 = 4 \times 0^2 = 0$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x-1} ?$ On pose : $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x-1}$

$$f(x) = \frac{\ln \left(x^2 \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right)}{x-1} = \frac{\ln x^2 + \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{2 \ln x + \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{x-1} = \frac{2 \ln x}{x-1} + \frac{\ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{x-1}$$

$$f(x) = 2 \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}} + \frac{\ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{x-1} \quad \text{on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) = 0$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x-1} = 0$

11) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln x)^5 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{\frac{2}{5}} \ln x \right)^5$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{5}} \ln x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln x)^5 = 0$

Exercice2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-1) = \frac{3}{2}$ 2) $2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

$$3) 3(\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0$$

$$4) \frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} \geq -1$$

Solution : 1) $\ln(2x-1) = \frac{3}{2}$

a) cette équation est définie ssi :

$$2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \text{ donc : } D_E = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

b) Résoudre l'équation :

$$\ln(2x-1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln(2x-1) = \frac{3}{2} \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x-1) = \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \Leftrightarrow 2x-1 = e^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = (\sqrt{e})^3 \Leftrightarrow x = \frac{(\sqrt{e})^3 + 1}{2} \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

Donc : $S = \left\{ \frac{(\sqrt{e})^3 + 1}{2} \right\}$

$$2) 2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$$

a) cette équation est définie ssi : $x > 0$

on pose : $\ln x = X$

on a alors : $2X^2 + X - 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 48 = 49 > 0$$

$$X_1 = \frac{-1+7}{2 \times 4} \text{ et } X_2 = \frac{-1-7}{2 \times 2}$$

Donc : $X_1 = \frac{3}{2}$ et $X_2 = -2$

Donc : $\ln x_1 = \frac{3}{2}$ et $\ln x_2 = -2$ donc : $x_1 = e^{\frac{3}{2}}$ et

$$x_2 = e^{-2} \text{ finalement : } S = \left\{ e\sqrt{e}, \frac{1}{e^2} \right\}$$

$$3) 3(\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0$$

a) cette équation est définie ssi : $x > 0$

on pose : $\ln x = X$

on a alors : $3X^2 + 2X - 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16 > 0$$

$$X_1 = \frac{-2+4}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ et } X_2 = \frac{-2-4}{2 \times 3} = \frac{-6}{6} = -1$$

Donc : $\ln x_1 = \frac{1}{3}$ et $\ln x_2 = -1$

Donc : $x_1 = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$ et $x_2 = e^{-1} = \frac{1}{e}$

finalement : $S = \left\{ \sqrt[3]{e}, \frac{1}{e} \right\}$

$$4) \frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} \geq -1$$

a) cette équation est définie ssi : $x > 0$ et $\ln x - 1 \neq 0$

$$\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$$

donc $D_I =]0; e[\cup]e; +\infty[$

$$\frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \geq 0$$

$$\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$$

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$\ln x + 1$	-	0	+	+
$\ln x - 1$	-	-	0	+
$\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$	+	0	-	+

$$S = (]0; e[\cup]e; +\infty[) \cap \left(\left] 0; \frac{1}{e} \right] \cup]e; +\infty[\right) = \left] 0; \frac{1}{e} \right] \cup]e; +\infty[$$

Exercice3 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

suisant :
$$\begin{cases} 3\ln x + \ln y = 2 \\ 2\ln x - \ln y = 3 \end{cases}$$

Solution :
$$\begin{cases} 3\ln x + \ln y = 2 \rightarrow 1 \\ 2\ln x - \ln y = 3 \rightarrow 2 \end{cases} \quad x > 0 \text{ et } y > 0$$

La somme des deux équations membres à membres donne :

$$5\ln x = 5 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$$

On remplace $x = e$ dans la première équation

On a donc :

$$3\ln e + \ln y = 2 \Leftrightarrow \ln y = 2 - 3 \Leftrightarrow \ln y = -1$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{e} \text{ Donc } S = \left\{ \left(e; \frac{1}{e} \right) \right\}$$

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : 1) $\ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3$

$$2) \ln(2x+5) + \ln(x+1) \leq \ln 4$$

$$3) \ln(14-x) > \ln(10+7x-3x^2)$$

Solution : 1) $\ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3$

a) cette équation est définie ssi : $x > 0$ et $x-1 > 0$
donc : $D_E =]1; +\infty[$

$$b) \ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3 \Leftrightarrow \ln(x(x-1)) = \ln 6$$

$$\text{Ssi } x(x-1) = 6 \text{ ssi } x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} \text{ et } x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = 3 \text{ ou } x_2 = -2 \notin]1; +\infty[\text{ donc : } S = \{3\}$$

$$2) \ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq \ln 4$$

a) cette équation est définie ssi : $x+1 > 0$ et $2x-5 > 0$ cad $\left(x > \frac{5}{2} \text{ et } x > -1 \right)$ donc $D_I = \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$

b)

$$\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq \ln 4 \Leftrightarrow \ln((2x-5)(x+1)) \leq \ln 4$$

$$(2x-5)(x+1) \leq 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 9 \leq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times (-9) = 9 + 72 = 81 > 0$$

$$x_1 = \frac{3+9}{2 \times 2} \text{ et } x_2 = \frac{3-9}{2 \times 2} \text{ donc : } x_1 = 3 \text{ et } x_2 = -\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$-3/2$	3	$+\infty$	
$2x^2-3x-9$	+	0	-	0	+

$$\text{Donc : } S = \left[-\frac{3}{2}; 3 \right] \cap \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[= \left] \frac{5}{2}; 3 \right]$$

$$3) \ln(14-x) > \ln(10+7x-3x^2)$$

a) cette équation est définie ssi : $14-x > 0$ et $10+7x-3x^2 > 0$ après résolution on trouve :

$$D_I = \left] -1; \frac{10}{3} \right[$$

$$b) \ln(14-x) > \ln(10+7x-3x^2)$$

$$14-x > 10+7x-3x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(3x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{2}{3} \right[\cup]2; +\infty[$$

$$\text{Donc : } S = \left(\left] -\infty; \frac{2}{3} \right[\cup]2; +\infty[\right) \cap \left] -1; \frac{10}{3} \right[$$

$$S = \left] -1; \frac{2}{3} \right[\cup \left] 2; \frac{10}{3} \right[$$

Exercice5 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1) f : x \rightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln(\ln x)} \quad 2) g : x \rightarrow \sqrt{1-\ln(e-x)}$$

$$3) h : x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{(\ln(2x))^2 - 1}}$$

Solution : 1) cette fonction est définie ssi :

$$x+1 > 0 \text{ et } x > 0 \text{ et } \ln x > 0 \text{ et } \ln(\ln x) \neq 0$$

$$\text{Cad } x > -1 \text{ et } x > 0 \text{ et } x > 1 \text{ et } \ln x \neq 1$$

$$\text{Cad } x > 1 \text{ et } x \neq e \text{ donc : } D_f =]1; e[\cup]e; +\infty[$$

2) cette fonction est définie ssi :

$$e-x > 0 \text{ et } 1 \geq \ln(e-x)$$

$$\text{Cad } x < e \text{ et } e-x \leq e \text{ Cad } x < e \text{ et } x \geq 0$$

$$\text{donc : } D_g = [0; e[$$

$$3) h : x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{(\ln(2x))^2 - 1}}$$

Cette fonction est définie ssi :

$$2x > 0 \text{ et } (\ln(2x))^2 - 1 > 0$$

$$\text{Cad } x > 0 \text{ et } (\ln(2x)-1)(\ln(2x)+1) > 0$$

$$\ln(2x)+1=0 \Leftrightarrow \ln 2x = -1 \Leftrightarrow \ln 2x = \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2e}$$

$$\ln(2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln 2x = 1 \Leftrightarrow \ln 2x = \ln e \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$$

x	0	$\frac{1}{2e}$	$\frac{e}{2}$	$+\infty$
$\ln 2x + 1$	-	0	+	+
$\ln 2x - 1$	-	-	0	+
$(\ln 2x + 1)(\ln 2x - 1)$	+	0	-	+

$$S = \left] 0; \frac{1}{2e} \right] \cup \left[\frac{e}{2}; +\infty \right[$$

2) Dérivée de la fonction $x \rightarrow \ln(u(x))$

D'après le théorème de la dérivée de la composition de deux fonctions on peut citer le théorème suivant :

Théorème : Si u est une fonction dérivable sur I et strictement positive sur I alors la fonction $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I

$$\text{et } (\forall x \in I) \left(f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$$

Exemple1 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln(3x^2 + 5)$$

Solution : la fonction $u : x \rightarrow 3x^2 + 5$ est dérivable

sur $\mathbb{R}$ et on a : $3x^2 + 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

alors la fonction : $f : x \rightarrow \ln(3x^2 + 5)$ est dérivable

$$\text{sur } \mathbb{R} \text{ et on a : } f'(x) = \frac{(3x^2 + 5)'}{3x^2 + 5} = \frac{6x}{3x^2 + 5} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemple2 : calculer la dérivée des fonctions

définies par : 1) $f(x) = x^2 - \ln x$ 2) $f(x) = x \ln x$

$$3) f(x) = \ln(1 + x^2)$$

$$\text{Solution : 1) } f'(x) = (x^2 - \ln x)' = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

$$2) f'(x) = (x \ln x)' = x' \ln x + x \ln' x = 1 \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$3) f'(x) = (\ln(1 + x^2))' = \frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Corolaire : Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors la fonction :

$f(x) = \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I

$$\text{et } (\forall x \in I) \left(f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$$

Preuve : (en exercice)

Etudier deux cas $u(x) > 0$ sur I et $u(x) < 0$ sur I .

Exemple1 : calculer la dérivée de la fonction

$$\text{définie sur } I =]-2; +\infty[\text{ par : } f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3 + 8}}{(x^2 + 1)^3}$$

Solution : $\forall x \in]-2; +\infty[$ on a :

$$\ln(f(x)) = \ln\left(\frac{\sqrt[4]{x^3 + 8}}{(x^2 + 1)^3}\right) = \ln(\sqrt[4]{x^3 + 8}) - \ln(x^2 + 1)^3$$

$$\ln(f(x)) = \frac{1}{4} \ln(x^3 + 8) - 3 \ln(x^2 + 1)$$

$$\text{Donc : } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{4} \frac{(x^3 + 8)'}{x^3 + 8} - 3 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} \quad \forall x \in]-2; +\infty[$$

$$\text{Donc : } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{4} \frac{3x^2}{x^3 + 8} - 3 \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\text{Donc : } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-3x(7x^3 - x + 64)}{4(x^3 + 8)(x^2 + 1)}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{-3x(7x^3 - x + 64)}{4(x^3 + 8)(x^2 + 1)} f(x) = \frac{-3x(7x^3 - x + 64)}{4\sqrt[4]{(x^3 + 8)^3} (x^2 + 1)^4}$$

Exemple2 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \ln|\ln|x||$$

$$2) f(x) = \ln|\sin^2 x + 3\sin x + 4|$$

Solution : 1) cette fonction est définie ssi :

$$|x| > 0 \text{ et } \ln|x| > 0 \text{ cad } x \neq 0 \text{ et } |x| > 1$$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

Donc f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[: f'(x) = (\ln|\ln|x||)' = \frac{(\ln|x|)'}{\ln|x|}$$

$$f'(x) = (\ln|\ln|x||)' = \frac{1}{x \ln|x|}$$

$$2) f(x) = \ln|\sin^2 x + 3\sin x + 4|$$

cette fonction est définie ssi : $\sin^2 x + 3\sin x + 4 > 0$

on pose : $t = \sin x$ donc : $t^2 + 3t + 4$

$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$ donc : $t^2 + 3t + 4 > 0$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

Alors : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(\sin^2 x + 3\sin x + 4)'}{\sin^2 x + 3\sin x + 4} = \frac{2\sin x \cos x + 3\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x + 4}$$

Propriété : Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors les fonctions primitives

de la fonction $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions ;

$$F(x) = \ln(|u(x)|) + Cte$$

Applications : Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

$$1) I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} \quad 2) I =]0; 1[; g(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$3) I =]-\infty; 1[; h(x) = \frac{1}{x-1} \quad 4) I = \left] \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right[; k(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$5) M(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad (\text{Essayer d'écrire})$$

$g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ où a et b des réels à déterminer).

$$6) N(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x-3}$$

$$7) I =]3; +\infty[; q(x) = \frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$$

$$\text{Solution : } 1) \text{ on a } f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} = \frac{1}{4} \frac{(x^4 + 2)'}{x^4 + 2}$$

$$\text{Donc : } F(x) = \frac{1}{4} \ln|x^4 + 2| + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Puisque : } x^4 + 2 > 0 \text{ donc : } F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 2) + k$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{(\ln x)'}{\ln x}$$

donc les fonctions primitives sont :

$$G(x) = \ln|\ln x| + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Puisque : $x \in]0; 1[$ donc : $\ln x < 0$

$$\text{Donc : } F(x) = \ln(-\ln x) + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$3) I =]-\infty; 1[; h(x) = \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)'}{x-1} \quad \text{donc les fonctions}$$

$$\text{primitives sont : } H(x) = \ln|x-1| + k$$

Puisque : $x \in]-\infty; 1[$ donc : $x-1 < 0$

$$\text{Donc : } H(x) = \ln(1-x) + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$4) I = \left] \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right[; k(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(\sin x)'}{\sin x} \quad \text{donc les}$$

$$\text{fonctions primitives sont : } K(x) = \ln|\sin x| + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$

$$5) m(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$m(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

Donc les fonctions primitives sont :

$$M(x) = \frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) = \ln \sqrt{\left| \frac{x-1}{x+1} \right|} + k$$

$$6) n(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x-3} = \frac{(x-3)(x^2 + 5x + 12) + 38}{x-3}$$

$$\text{Donc : } n(x) = x^2 + 5x + 12 + \frac{38}{x-3}$$

Donc les fonctions primitives sont :

$$N(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2} x^2 + 12x + 38 \ln|x-3| + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$7) I =]3; +\infty[; q(x) = \frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$$

$$q(x) = \frac{1}{(x-2)\ln(x-2)} = \frac{\frac{1}{(x-2)}}{\ln(x-2)} = \frac{(\ln(x-2))'}{\ln(x-2)}$$

Donc : donc les fonctions primitives sont :

$$Q(x) = \ln|\ln(x-2)| + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et Déterminer les réels a et b tels que :

$$(\forall x \in D); f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

2) en déduire la fonction primitive de f sur $] -\infty; -2[$

$$\text{Tel que } F(-3) = \ln 2$$

$$\text{Solution :1) } D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \neq 0\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-3}{2 \times 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R} / \{-2; 1\}$$

$$f(x) = \frac{a(x+2) + b(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{ax + 2a + bx - b}{(x-1)(x+2)} = \frac{(a+b)x + 2a - b}{(x-1)(x+2)}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} a+b=5 \\ 2a-b=1 \end{cases} \quad \text{Donc: } 3a=6 \quad \text{Donc: } a=2$$

$$\text{Donc : } b=3 \quad \text{Donc: } (\forall x \in D_f); f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$$

$$2) (\forall x \in \mathbb{R} / \{-2; 1\}); f(x) = 2 \frac{(x-1)'}{x-1} + 3 \frac{(x+2)'}{x+2}$$

$$F(x) = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$x \in]-\infty; -2[\Leftrightarrow x < -2 \quad \text{et} \quad x < 1$$

$$\text{Donc : } x+2 < 0 \quad \text{et} \quad x-1 < 0$$

Donc : les fonctions primitives sont :

$$F(x) = 2\ln(1-x) + 3\ln(-x-2) + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$F(-3) = \ln 2 \Leftrightarrow 2\ln(4) + 3\ln(1) + k = \ln 2$$

$$k = \ln 2 - 2\ln(2^2) \Leftrightarrow k = -3\ln 2$$

$$\text{Donc : } F(x) = 2\ln(1-x) + 3\ln(-x-2) - 3\ln 2$$

II) FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE a

1) Définition

Définition : Soit a un réel non nul et différents

de 1. La fonction notée par $\log_a$ définie sur $]0, +\infty[$

$$\text{par : } (\forall x \in]0, +\infty[) \left(\log_a = \frac{\ln x}{\ln a} \right) \text{ S'appelle :}$$

la fonction logarithmique de base a

$$\text{Exemples : 1) Pour: } a=e \text{ on aura : } \log_e = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

$$2) \log_2 4 = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} = 2$$

2) Propriétés et règles de calcul :

Toutes les propriétés de calcul qu'on a vu concernant la fonction $\ln$ restent valables pour la fonction $\log_a$.

a) Propriétés caractéristiques

- $(\forall x > 0)(\forall y > 0)(\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y))$
- $(\forall x > 0) \left(\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \right)$
- $(\forall x > 0)(\forall y > 0) \left(\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \right)$
- $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\log_a(x^r) = r\log_a(x))$

Preuve : Pour démontrer les propriétés précédentes il suffit d'utiliser la définition de la fonction $\log_a$ et les propriétés de la

Fonction $\ln$

b) Propriétés : La fonction $\log_a$ est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$

$$1) (\forall x > 0)(\forall y > 0) (\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y)$$

$$2) (\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q}) (\log_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r)$$

c) Propriété : La fonction $\log_a$ est continue dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(\forall x \in]0, +\infty[)$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$$

Preuve : (En exercice)

2) Etude et représentation de $\log_a$:

Soit a un réel strictement positif et différent de 1 :

1) La fonction $\log_a$ est définie sur $]0, +\infty[$.

2) La fonction $\log_a$ est continue et dérivable

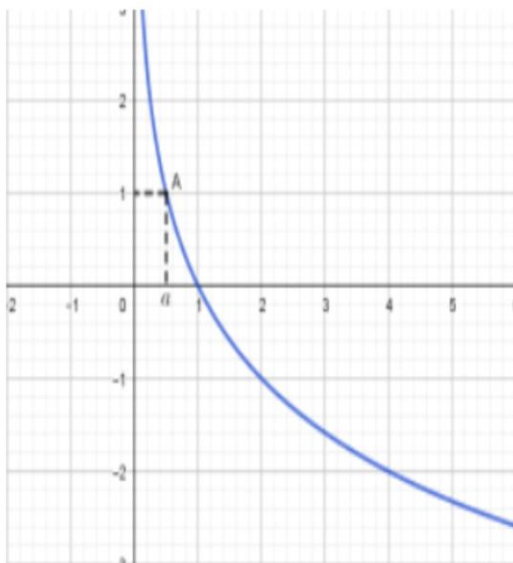
sur $]0, +\infty[$ et $(\forall x \in]0, +\infty[) ((\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a})$

donc le signe de $\log'_a$ dépend du signe de $\ln a$, ce qui nous amène à discuter deux cas :
 $\ln a > 0$; $\ln a < 0$

Si $a \in]0, 1[$ alors $\ln a < 0$

Et donc : $(\forall x \in]0, +\infty[) (\log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} < 0)$.

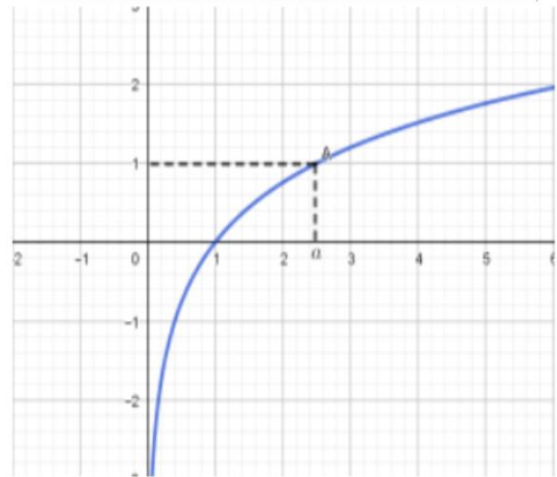
x	0	a	1	$+\infty$
$\log'_a(x)$		-	-	
$\log_a(x)$	$+\infty$	1	0	$-\infty$



Si $a \in]1, +\infty[$ alors $\ln a > 0$

Et donc : $(\forall x \in]0, +\infty[) (\log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} > 0)$.

x	0	1	a	$+\infty$
$\log'_a(x)$		+	+	
$\log_a(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



Exemples : simplifier et calculer :

1) $\log_8 4$ 2) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$ 3) $\log_{\sqrt{3}} 9$

4) $A = \log_2 \left(\frac{1}{5} \right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}(\sqrt[5]{3})$

Solution : 1)

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = -\log_{\sqrt{2}} 2 = -\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 = -2 \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = -2 \times 1 = -2$$

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^4 = 4 \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 4 \times 1 = 4$$

$$A = \log_2 \left(\frac{1}{5} \right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}(\sqrt[5]{3}) = -\log_2 5 + \log_2(5 \times 2) + \log_{\frac{1}{3}} \left(3^{\frac{1}{5}} \right)$$

$$A = -\log_2 5 + \log_2 5 + \log_2 2 + \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} 3$$

$$A = 1 - \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Exercice 7 : On pose $\alpha = \log_{40}(100)$ et $\beta = \log_{16}(25)$

Calculer β en fonction α

Solution : on a : $\alpha = \frac{\ln 100}{\ln 40} = \frac{\ln(2^2 \times 5^2)}{\ln(2^3 \times 5)} = \frac{2\ln 2 + 2\ln 5}{3\ln 2 + \ln 5}$

D'autre part : $\beta = \frac{\ln 25}{\ln 16} = \frac{\ln(5^2)}{\ln(2^4)} = \frac{2\ln 5}{4\ln 2} = \frac{\ln 5}{2\ln 2}$

Aussi on a : $\alpha = \frac{2 + 2 \frac{\ln 5}{\ln 2}}{3 + \frac{\ln 5}{\ln 2}} = \frac{2 + 4\beta}{3 + 2\beta}$

$\alpha = \frac{2 + 4\beta}{3 + 2\beta} \Leftrightarrow \alpha(3 + 2\beta) = 2 + 4\beta \Leftrightarrow 3\alpha + 2\alpha\beta = 2 + 4\beta$

$3\alpha + 2\alpha\beta = 2 + 4\beta \Leftrightarrow 2(\alpha - 2)\beta = 2 - 3\alpha \Leftrightarrow \beta = \frac{2 - 3\alpha}{2(\alpha - 2)}$

3) Cas particulier $\alpha = 10$; logarithme décimal :

Définition : La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se

note par **log** et $(\forall x \in]0, +\infty[)$ ($\log = \frac{\ln x}{\ln 10}$)

Propriétés : 1) $\log(10) = 1$

2) $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r)$

3) $(\forall r \in \mathbb{Q})(\log(10^r) = r)$

4) $\log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$

5) $\log(x) \leq r \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^r$

Exemples : simplifier et calculer :

1) $\log_{10} 100$ 2) $\log_{10} 0,0001$

3) $A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125)$

Solution : 1) $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10 = 2 \times 1 = 2$

2) $\log_{10} 0,0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4\log_{10} 10 = -4$

3) $A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125)$

$A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125)$

$A = \log(5^2 \times 10^4) + \frac{1}{2} \log(5^2 \times 10) - \log(5^3)$

$A = \log 5^2 + \log 10^4 + \frac{1}{2}(\log 5^2 + \log 10) - 3\log 5$

$A = 2\log 5 + 4\log 10 + \frac{1}{2}(2\log 5 + 1) - 3\log 5$

$A = 2\log 5 + 4 + \log 5 + \frac{1}{2} - 3\log 5 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

Exercice 8 : déterminer le plus petit entier naturel

n tel que : $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 10^{20}$

Solution : $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 10^{20} \Leftrightarrow \log\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) \geq \log(10^{20})$

$\Leftrightarrow n \log\left(\frac{3}{2}\right) \geq 20 \Leftrightarrow n \geq \frac{20}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}$

Le plus petit entier naturel n_0 est donc :

$n_0 = E\left(\frac{20}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}\right) + 1 = 114$

Exercice 9 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

1) $\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$

2) $2(\log x)^2 - 19\log x - 10 = 0$

Où $\log$ est le logarithme décimal

Solution : 1) a) cette équation est définie ssi :

$x > 0$ et $2x > 0$ donc : $D_E =]0; +\infty[$

b) Résoudre l'équation : $\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$

ssi $\log_5(x) - 1 = 0$ et $\log_3(2x) = 0$

ssi $\log_5(x) = \log_5(5)$ et $\log_3(2x) = \log_3(1)$

ssi $x = 5$ et $x = \frac{1}{2}$ donc : $S = \left\{\frac{1}{2}; 5\right\}$

2) $2(\log x)^2 - 19\log x - 10 = 0$

$D_E =]0; +\infty[$ on pose : $\log x = X$ donc :

$2X^2 - 19X - 10 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (19)^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 361 + 80 = 441 = (21)^2 > 0$

$X_1 = \frac{19 + 21}{2 \times 2} = 10$ et $X_2 = \frac{19 - 21}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$

Donc : $\log x_1 = 10$ et $\log x_2 = -\frac{1}{2}$

Donc : $x_1 = 10^{10}$ et $x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Donc : $S = \left\{ \frac{\sqrt{10}}{10}, 10^{10} \right\}$

Exercice 10 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations et équations suivantes :

1) $\log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \geq 1$ 2) $\log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4$

Solution : 1)a) cette équation est définie ssi :

$x - \frac{1}{2} > 0$ donc : $x > \frac{1}{2}$ donc : $D_I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

a) $\log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \geq 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \geq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

car : $\log_{\frac{1}{2}}$ est strictement décroissante

donc : $x \leq 1$ donc : $S =]-\infty; 1] \cap \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[= \left] \frac{1}{2}; 1 \right]$

2)a) cette équation est définie ssi :

$4x > 0$ et $16x > 0$ et $2x > 0$ et $2x \neq 1$ et $4x \neq 1$

donc : $x > 0$ et $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq \frac{1}{4}$

donc : $D_I =]0; +\infty[- \left\{ \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right\}$

b) $\forall x \in D_I : \log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{2x}(2) + \log_{2x}(2x) + \log_{4x}(4x) + \log_{4x}(4) = 4$

Or on a $\log_a(a) = 1$ donc :

$\Leftrightarrow \log_{2x}(2) + \log_{4x}(4) = 2$

Et on a : $\log_{2x}(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(2x)} = \frac{1}{\log_2(2x)}$

$\log_2(2x) = \log_2(2) + \log_2 x = 1 + \log_2 x$

Donc : $\log_{2x}(2) = \frac{1}{1 + \log_2 x}$

D'autre part on a : $\log_{4x}(4) = \frac{\ln(4)}{\ln(4x)} = \frac{1}{\log_4(4x)}$ et

$\log_4(4x) = \log_4(4) + \log_4 x = 1 + \log_4 x$

Et puisque : $\log_4 x = \frac{\ln(x)}{\ln(4)} = \frac{\ln(x)}{2\ln(2)} = \frac{1}{2} \log_2 x$

Donc : $\log_{4x}(4) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \log_2(x)} = \frac{2}{2 + \log_2(x)}$

Donc l'équation devient : $\frac{1}{1 + \log_2 x} + \frac{2}{2 + \log_2 x} = 2$

Cad : $2(\log_2 x)^2 + 3\log_2 x = 0$

Cad : $\log_2 x = -\frac{3}{2}$ ou $\log_2 x = 0$

Cad : $x = 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ou $x = 1$

donc : $S = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}}; 1 \right\}$

4) Applications

Exemple1: A) soit la fonction g définie

par : $g(x) = x - \ln x$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g et déterminer les limites aux bornes de D_g

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g

3) en déduire que : $\forall x > 0 \quad x > \ln x$

B) soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x}; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1) Montrer que $D_f = [0; +\infty[$

2) Montrer que f est continue à droite de 0

3) calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0

5) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$

6) Dresser le tableau de variation de f

7) déterminer les points d'intersections de C_f et la

Droite : $(\Delta): y=1$

8) Montrer que : C_f coupe l'axe des abscisses

en un point d'abscisse dans $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$

9) Construire la courbe C_f dans un repère

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ ($\ln 2 \approx 0,7$, $e \approx 2,7$)

Solution : 1) $D_g =]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln x = +\infty \quad \text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$2) g'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Le signe de: $g'(x)$ est celui de $x-1$ car $x \in]0; +\infty[$

Tableau de variation de g

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1	$\nearrow$ $+\infty$

3) on remarque que : que la fonction g

Admet une valeur minimal en $x_0 = 1$

$$\text{Donc : } g(1) \leq g(x) \quad \forall x \in]0; +\infty[\quad g(1) = 1$$

$$\text{Donc : } 0 < 1 \leq x - \ln x \quad \text{Donc : } \ln x < x \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

$$\text{B) 1) } \begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x} \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

f est définie ssi $x - \ln x \neq 0$ et $x > 0$

On a $0 < x - \ln x$ donc : $x - \ln x \neq 0$ et on a $f(0) = -1$

Donc : $D_f =]0; +\infty[$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} + 1 \right)}{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{\ln x} + 1}{\frac{x}{\ln x} - 1}$$

$$\text{Et on a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0^- \quad \text{et } \frac{0}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 = f(0)$$

Donc : f est continue à droite de 0

3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}} = 1$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Interprétation graphique : la droite $y = 1$ est une

asymptote à la courbe de f

4) Etude de la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x + \ln x}{x - \ln x} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x + x - \ln x}{x(x - \ln x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(x - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x - \ln x} = 0 = f'_d(0)$$

Donc : f est dérivable à droite de 0

5)

$$f'(x) = \left(\frac{x + \ln x}{x - \ln x} \right)' = \frac{(x + \ln x)'(x - \ln x) - (x + \ln x)(x - \ln x)'}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)(x - \ln x) - (x + \ln x) \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{x - \ln x + 1 - \frac{\ln x}{x} - x - \ln x + 1 + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{(x - \ln x)^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$$

6) tableau de variation de $f : x \in]0; +\infty[$

Le signe de: $f'(x)$ est celui de $1 - \ln x$

$$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow \ln e > \ln x \Leftrightarrow e > x$$

Tableau de variation de f

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	$\frac{e+1}{e-1}$	1

7) points d'intersections de C_f et $(\Delta): y=1$?

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = 1 \Leftrightarrow x + \ln x = x - \ln x$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

le point d'intersection de C_f et la Droite : $(\Delta): y=1$

est : $A(1;1)$

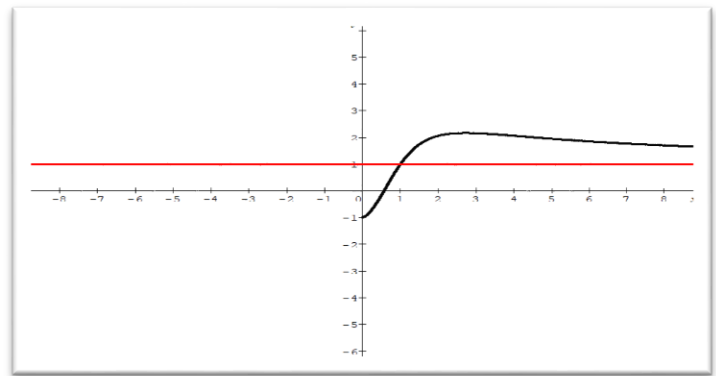
8) f est continue sur $D_f = [0; +\infty[$ donc continue

Sur : $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et on a : $f(1) = \frac{\frac{1}{2} + \ln(1)}{\frac{1}{2} - \ln(1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 > 0$

Et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \ln 2}{\frac{1}{2} + \ln 2} = \frac{1 - 2 \ln 2}{1 + 2 \ln 2} < 0$

Donc : d'après le théorème des valeurs intermédiaires : l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$ cad C_f coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse dans $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$

9)



Exemple2 : Considérons les fonctions f et g définies sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \text{ et } g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

1)a) calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$$

b) montrer que : $\forall x \in]-1; +\infty[$ on a :

$$g(x) = (1+x) \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} \right)$$

et en déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

c) Etudier les variations des fonctions f et g
Puis dresser les tableaux de variations de f et g

2) en déduire que $\forall x \in]0; +\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

3) calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

4) montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Solution :1) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x)$?

On pose : $t = 1+x \quad x \rightarrow -1^+ \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$$

Et on a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} -x + \frac{x^2}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$? on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{x^2}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$

Et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = ?$ on a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = -\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow -1^+} -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{11}{6}$ donc : $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$

b) montrons que : $\forall x \in]-1; +\infty[$ on a :

$$g(x) = (1+x) \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} \right) ?$$

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) = \ln(1+x) - \left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6} \right)$$

$$g(x) = (1+x) \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} \right)$$

Déduction de : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} \right)$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$? On pose : $t = 1+x$

$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3} = +\infty$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+x = +\infty$

C1) Etude des variations les fonctions f?

$\forall x \in]-1; +\infty[$ $x \rightarrow \ln(1+x)$ est dérivable donc f est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{(1+x)'}{1+x} - 1 + x = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0 \quad \forall x \in]-1; +\infty[$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donc : *tableau de variations de f* :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

C2) Etude des variations les fonctions g ?

g est dérivable sur $\forall x \in]-1; +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x+x^2) = \frac{-x^3}{1+x}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$

Donc : *tableau de variations de g* :

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

2) déduction d'un encadrement de $\ln(1+x)$?

Des variations les fonctions f et g en déduit que :

$g(x) < 0 < f(x) \quad \forall x \in]0; +\infty[$ donc :

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} < 0 < \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Donc : } x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$?

Donc : $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ on déduit que

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{3} < \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} < \frac{1}{2} \quad \text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

4) montrons que : $\forall x \in]0; +\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} ?$$

Soit ψ la fonction définie $\forall x \in]-1; +\infty[$

Par : $\psi(x) = g(x) + \frac{x^4}{4}$

ψ est dérivable sur $\forall x \in]-1; +\infty[$ et on a :

$$\psi'(x) = g'(x) + x^3 = \frac{x^4}{1+x} \geq 0 \quad \forall x \in]-1; +\infty[$$

$\psi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc ψ strictement croissante

sur $]-1; +\infty[$

$$x \geq 0 \Rightarrow \psi(x) \geq \psi(0) = 0$$

donc : $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) \quad \forall x \in]0; +\infty[$

donc : $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Exemple3 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations et équations suivantes :

1) $\log_3(7x-1)^2 = 0$ 2) $\log_3(5x+1) = 2$

3) $\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1$

Solution : 1)a) cette équation est définie ssi :

$$7x-1 \neq 0 \text{ donc : } x \neq \frac{1}{7} \text{ donc : } D_1 = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{7} \right\}$$

..b) $\log_3(7x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (7x-1)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow 7x-1=1 \text{ ou } 7x-1=-1 \Leftrightarrow x=\frac{2}{7} \text{ ou } x=0$$

donc : $S = \left\{ 0; \frac{2}{7} \right\}$

2) $\log_3(5x+1) = 2$

2)a) cette équation est définie ssi : $5x+1 > 0$

Donc : $D_E = \left] -\frac{1}{5}; +\infty \right[$

$$\log_3(5x+1) = 2 \Leftrightarrow 5x+1 = 3^2 \Leftrightarrow 5x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$$

Puisque : $\frac{8}{5} \in \left] -\frac{1}{5}; +\infty \right[$ alors : $S = \left\{ \frac{8}{5} \right\}$

3) $\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1$

a) cette équation est définie ssi : $5x+1 > 0$ et

$$\log_3(7x-1)^2 \neq 0 \text{ et } 7x-1 \neq 0$$

cad : $x > -\frac{1}{5}$ et $x \neq \frac{1}{7}$ et $x \neq \frac{2}{7}$ et $x \neq 0$

$$D_E = \left] -\frac{1}{5}; +\infty \right[- \left\{ 0; \frac{1}{7}; \frac{2}{7} \right\}$$

D'abord étudions le signe de : $\log_3(7x-1)^2$

$$\log_3(7x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (7x-1)^2 \geq 1 \text{ car : } \log_{\frac{1}{2}} \text{ est}$$

strictement décroissante

$$\Leftrightarrow (7x-1)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x(7x-2) \geq 0$$

1cas : si : $x \in \left] -\frac{1}{5}; 0 \right[\cup \left] \frac{2}{7}; +\infty \right[$ on a donc :

$$\log_3(7x-1)^2 \geq 0$$

$$\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_3(5x+1) \leq \log_3(7x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 5x+1 \leq (7x-1)^2 \Leftrightarrow 0 \leq 49x^2 - 19x$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{5}; 0 \right[\cup \left] \frac{19}{49}; +\infty \right[$$

2cas : si : $x \in \left]0; \frac{1}{7}\right[\cup \left]\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right[$ on a donc :

$$\log_3(7x-1)^2 < 0$$

$$\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_3(7x-1)^2 \leq \log_3(5x+1)$$

$$\Leftrightarrow (7x-1)^2 \leq 5x+1 \Leftrightarrow 49x^2 - 19x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\left]0; \frac{1}{7}\right[\cup \left]\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right[\right) \cap \left[0; \frac{19}{49}\right] \Leftrightarrow x \in \left]0; \frac{1}{7}\right[\cup \left]\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right[$$

$$\text{Donc : } S = \left]-\frac{1}{5}; 0\right[\cup \left]0; \frac{1}{7}\right[\cup \left]\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right[\cup \left[\frac{19}{49}; +\infty\right[$$

Exemple4: Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2) montrer que le domaine d'étude de f est :

$$D_E =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

3) Déterminer les limites aux bornes de D_E

4) Etudier les variations de f sur D_E

5) Etudier les branches infinies de (C_f)

la courbe de f

6). Construire la courbe (C_f) dans D_E

$$\text{Solution : 1) } f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

cette fonction est définie ssi : $x \neq 0$ et $x \neq 1$

$$\text{et } \frac{x+1}{x-1} \neq 0$$

$$\text{donc : } x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x \neq 0$$

$$\text{donc : } D_f = \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$$

2) le domaine d'étude de f ?

$$\text{a) } \forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\} \text{ on a } -x \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$$

$$\text{b) } f(-x) = -x - 3 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-x+1}{-x-1} \right|$$

$$f(-x) = -x - 3 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

$$f(-x) = -x - 3 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

$$\text{Donc : } f(-x) + f(x) = -6$$

$$\text{Donc : } f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times (-3) - f(x)$$

Donc le point : $I(0; -3)$ est un centre de symétrie de (C_f) la courbe de f

donc Il suffit d'étudier f sur : $D_E =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

3) les limites aux bornes de D_E ?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 0 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

4) Etude des variations de f sur D_E ?

La fonction f est dérivable sur les intervalles

$]1; +\infty[$ et $]0; 1[$ (somme et composées de fonctions dérivables)

$$\text{et on a : } f'(x) = 1 - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{(2x^2-1)(x^2-3)}{2x^2(x^2-1)}$$

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

Donc : tableau de variations de f :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\sqrt{2}/2)$	$+\infty$	$+\infty$	$f(\sqrt{3})$	$+\infty$

5) Etude des branches infinies de (C_f)

la courbe de f ?

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ donc : $x=0$ est une asymptote

de la courbe de f

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ donc : $x=1$ est une asymptote

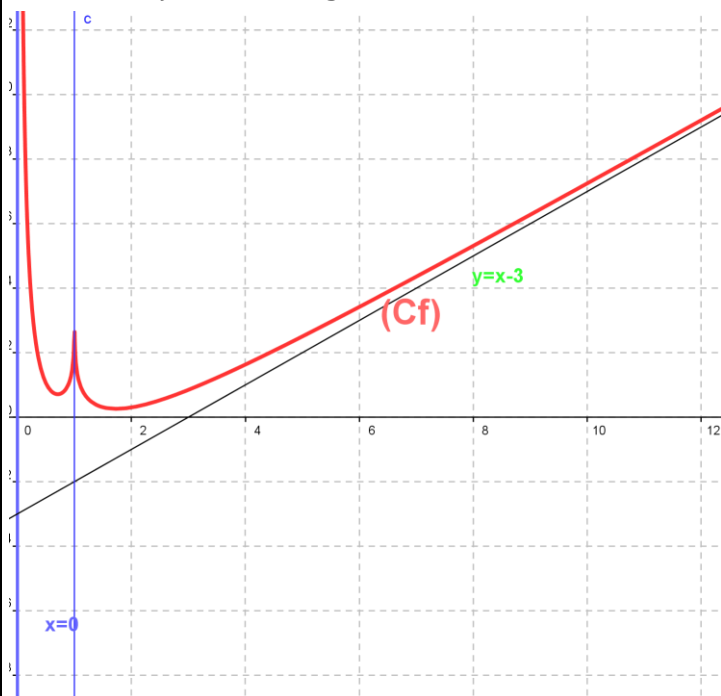
de la courbe de f

- $x=-1$ est une asymptote de la courbe de f (par symétrie)

• On a : $f(x) - (x-3) = \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$

$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (x-3) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 0$

Donc : $y = x - 3$ est une asymptote oblique de la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$



« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

