Suites numériques

I) *Définition, vocabulaires et notations.*

Définition : Toute fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$, ou d'une partie I de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ est dite suite numérique.

Notation et vocabulaire.

- L'image de n par la suite u est notée u_n au lieu de $u(n)$.
- La suite est notée $(u_n)_{n\in I}$ (ou plus simplement (u_n) si $n\in\mathbb{N}$).
- u_n est un « terme » de la suite, et on l'appelle terme général de la suite.
- Si la suite commence par u_1, alors u_n est le $n^{\text{ième}}$ terme, ou terme de rang n.
- Si la suite commence par u_0 , u_n est le terme de rang $n+1$.
- On peut définir une suite par une **formule explicite**, c'est-à-dire par une relation du type : $u_n = f(n)$
- On peut définir une suite par **récurrence,** c'est-à-dire par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ ou par d'autres types.

II) *Monotonie d'une suite numérique*

Soit I une partie de $\mathbb{N}$ tel que : $I=\{n\in\mathbb{N} \;/\; n\geq p \;\; avec \;\; p\in\mathbb{N}\}$

Définitions : On dit que la suite $(u_n)_{n\geq p}$ est strictement décroissante, si $(\forall n\geq p):\; u_{n+1}\leq u_n$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq p}$ est strictement croissante, si $(\forall n\geq p):\; u_{n+1}\geq u_n$.

III) *Suite majorée – Suite minorée – Suite bornée*

Définitions :

- **On** dit que la suite $(u_n)_{n\geq p}$ est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que $(\forall n\geq p): u_n\leq M$.

  Le nombre M est alors appelé un **majorant** de la suite $(u_n)_{n\geq p}$.
- **On** dit que la suite $(u_n)_{n\geq p}$ est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que : $(\forall n\geq p): u_n\geq m$.

  Le nombre m est alors appelé un **minorant** de la suite $(u_n)_{n\geq p}$.
- **On** dit que la suite $(u_n)_{n\geq p}$ est **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

***Remarques* :**

- Si (u_n) est une suite croissante, alors elle est minorée par son premier terme u_0 .
- Si (u_n) est une suite décroissante, alors elle est majorée par son premier terme u_0.

IV) *Suite arithmétique – Suite géométrique.*

	Suite arithmétique	*Suite géométrique*
$(u_n)_{n\geq p}$ *est une suite*	S'il existe un réel r tel que : $(\forall n\geq p): u_{n+1}-u_n=r$ (r est appelé ***raison de la suite***)	S'il existe un réel q tel que : $(\forall n\geq p): u_{n+1}=q\,u_n$ (q est appelé ***raison de la suite***)
u_n *en fonction de* n	$(\forall n\geq p): u_n=u_p+(n-p)r$	$(\forall n\geq p): u_n=u_p\times q^{n-p}$
Somme des premiers termes d'une suite	$S=\left(\dfrac{u_p+u_n}{2}\right)(n-p+1)$	$S=u_p\left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$ avec $q\neq 1$

Avec $S=u_p+u_{p+1}+\dots\dots+u_{n-1}+u_n$

V) *Limite d'une suite numérique .*

1) *Suites de référence – suite convergente.*

Définition : On dit qu'une suite **(u_n)** est **convergente** vers le réel $\boldsymbol{a}$ lorsque tout intervalle ouvert contenant $\boldsymbol{a}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

- Une suite est dite **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

- Des suites **convergentes** vers **0** : $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n\in IN^*}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in IN^*}$ où p est un entier naturel non nul.
- Des suites **divergentes** vers $+\infty$: $(n^p)_{n\geq 0}$; $\left(\sqrt{n}\right)_{n\geq 0}$ où p est un entier naturel non nul.
- Limite d'une suite **géométrique :**

q	$q\leq -1$	$-1<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	*pas de limite*	**0**	**1**	$+\infty$

2) *Critères de convergence.*

Théorème 1 : Soient **(u_n)** et **(v_n)** deux suites définies sur **IN**.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 2 : Soient **(u_n)** et **(v_n)** deux suites définies sur **IN**.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème des *gendarmes* : Soient **(u_n) , (v_n)** et **(w_n)** trois suites définies sur **IN**.
Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$ alors **(u_n)** est ***convergente*** et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

Théorème des *gendarmes* : Soient **(u_n)** et **(v_n)** deux suites définies sur **IN** .
Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - L| \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors **(u_n)** est ***convergente*** et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

Théorème 3 :
- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

Remarque : Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.

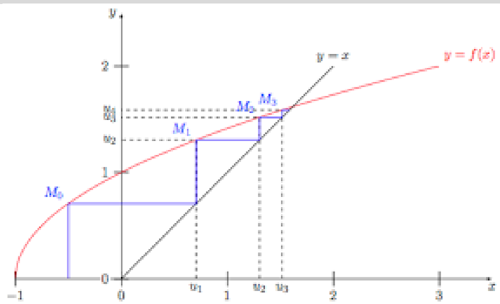
3) *Théorème de convergence des suites récurrentes.*

Propriété : Soit **(u_n)** une suite définie par :

$$(\forall n\in IN);\ u_{n+1} = f(u_n) \quad et \quad u_0 \in I$$

Si $\boldsymbol{f}$ est **continue** sur $\boldsymbol{I}$, $f(I)\subset I$ et **(u_n)** est **convergente** alors la limite ℓ de **(u_n)** est une solution de l'équation $\boldsymbol{f(x) = x}$

On dit que ℓ est un "point fixe" de la fonction ***f***.



Principe de récurrence :

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on procède en deux étapes, puis on conclut.

- **Première étape :** On vérifie que P_0 est vraie.
- **Deuxième étape : O**n suppose que pour un entier naturel $\boldsymbol{n}$ quelconque, la propriété P_n est vraie, et sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{n+1} est vraie.
- **Conclusion :** lorsque les deux étapes sont franchies, on conclut que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ positif.