

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

- ① - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9x + 8}$:: ② - $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - x - 20}$:: ③ - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 3x - 2}{7x^2 - 3x - 4}$:: ④ - $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 8x - 3}$.
- ⑤ - $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$:: ⑥ - $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5}$:: ⑦ - $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x + 4} - \sqrt{5x - 4}}{\sqrt{x + 5} - 3}$.
- ⑧ - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^4 + x^2 + 2}}$:: ⑨ - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 2}{2x^2 - 9x}$:: ⑩ - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^4}{x^3 - x^2 + 1}$.
- ⑪ - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} - 2x$:: ⑫ - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$:: ⑬ - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3x - 1} + 2x - 1$.
- ⑭ - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{x}$:: ⑮ - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} + \sqrt{x^2 + 3x - 2} + 2x$.

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes :

- ① - $\lim_{\substack{x \rightarrow 6 \\ x < 6}} \frac{2x + 3}{x - 6}$:: ② - $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{2x - 9}{x^2 - 2x - 3}$:: ③ - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 4}$:: ④ - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + |x - 2| - 4}{x - 2}$.
- ⑤ - $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$:: ⑥ - $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 1}$:: ⑦ - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$:: ⑧ - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{4x - \pi}$.
- ⑨ - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$:: ⑩ - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}$:: ⑪ - $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi}$:: ⑫ - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

Exercice 3 :

Etudier la continuité de la fonction f aux points x_0 dans chacun des cas suivants :

- ① - $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 15}{x - 3} ; x \neq 3 \\ f(3) = 7 \end{cases}$ et $x_0 = 3$:: ② - $\begin{cases} f(x) = -2x^2 + 3 ; x \leq 2 \\ f(x) = x^3 + 2x - 1 ; x > 2 \end{cases}$ et $x_0 = 2$.
- ③ - $\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} ; x \leq 3 \\ f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 3x} ; x > 3 \end{cases}$ et $x_0 = 3$.

Exercice 4 :

① - Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet au moins une solution dans l'intervalle I .

$a - x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ et $I = [2, 3]$:: $b - x^4 - 2x - \sqrt{x} + 2 = 1$ et $I =]0, 1[$.

$c - x^3 - 3x^2 + 15x = 7$ et $I = \mathbb{R}$:: $d - x^{17} = x^{11} + 1$ et $I = [0, +\infty[$.

② - Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet une unique solution dans l'intervalle I .

$$\begin{aligned} a - x^3 - 3x^2 - 5 = 0 \text{ et } I = [2, 4] & \quad ;: \quad b - 2x^3 + 3x + 5 = 1 \text{ et } I =]-1, 0[\\ c - x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \text{ et } I =]-\infty, 0] & \quad ;: \quad d - 2x^3 - 5x^2 = 3 \text{ et } I = \mathbb{R} \end{aligned}$$

✎ Exercice 5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3 + 2x - 4$.

- ① - Etudier les variations de la fonction f .
- ② - Montrer que la courbe représentatif de la fonction f coupe l'axe des abscisses en un seul point dont l'abscisse α tel que $1 < \alpha < 2$.
- ③ - En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 25×10^{-2}

✎ Exercice 6 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 2bx + 1}{2x^2 + ax - a - 2} & ; x < 1 \\ f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1} & ; x > 1 \\ f(1) = \frac{2+c}{3} \end{cases}$$

Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction f soit continue au point $x_0 = 1$.

✎ Exercice 7 :

- ① - Soit f et g deux fonction continues sur $[0; 1]$ telles que : $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer que : $(\exists \alpha \in [0; 1]) : f(\alpha) = 2017g(\alpha)$.
- ② - Soit f une fonction continue sur $]0; 1[$. Montrer que : $(\exists \alpha \in]0; 1[) : f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$.
- ③ - Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ telles que : $f(a) < ab$ et $b^2 < f(b)$.
Montrer que : $(\exists \alpha \in]a; b[) : f(\alpha) = \alpha b$.

✎ Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $I = [1; +\infty[$ par : $f(x) = (1 + x^3)^2$.

- ① - Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
- ② - Calculer $(\forall x \in J) : f^{-1}(x)$.

✎ Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$.

- ① - Etudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
- ② - Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$.
a - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
b - Calculer $(\forall x \in J) : g^{-1}(x)$.