Prof : IDRISSI Abdessamad	Limites et Continuité (série n°2)	$2^{ème}$ Année Bac

Exercice 1 :

① - Simplifier les nombres suivants :

$$A=\frac{\sqrt[3]{7^2}\times\sqrt[4]{7}\times\sqrt[5]{7^4}}{\left(\sqrt[6]{7^5}\right)^2} \;;\; B=\frac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}\times\sqrt[5]{2}}{\sqrt[4]{2^3}\times\sqrt[12]{2}} \;;\; C=\frac{\sqrt[4]{2048}\times\sqrt[4]{160000}}{\sqrt[8]{4096}\times\sqrt[3]{\sqrt{256}}\times\sqrt{512}}.$$

② - Ordonner dans l'ordre croissant les nombres : $A=\sqrt{2}$; $B=\sqrt[3]{3}$; $C=\sqrt[4]{5}$; $D=7^{\frac{1}{6}}$ et $E=14^{\frac{1}{12}}$

③ - Calculer les limites suivantes :

a - $\lim\limits_{x\mapsto1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x-5}{2x^2-5x+3}$;; b - $\lim\limits_{x\mapsto1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$;; c - $\lim\limits_{x\mapsto0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$;; d - $\lim\limits_{x\mapsto5}\dfrac{\sqrt[3]{x+22}-3}{x^2-6x+5}$.

e - $\lim\limits_{x\mapsto2}\dfrac{\sqrt[3]{2x+4}-\sqrt[3]{5x-2}}{x-2}$;; f - $\lim\limits_{x\mapsto8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+56}-4}$;; g - $\lim\limits_{x\mapsto1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$;; h - $\lim\limits_{x\mapsto3^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$.

i - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{2x^2-4x+1}-x+3$;; j - $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\sqrt[3]{x^2-2x-3}-\sqrt[3]{x^2+1}$;; k - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{x}$.

l - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{x+1}}$;; m - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt[3]{x^3+4x+2}+\sqrt{x^3-5x^2+1}-2x$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-1}+3 & ;\ x\geq1 \\ f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & ;\ x\prec1 \end{cases}$.

①- a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Calculer : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)$.

②- Etudier la continuité de la fonction f aux points $x_0=1$.

③- Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

④- Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$.

a - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .

b - Calculer $(\forall x\in J)$: $g^{-1}(x)$.

c - Résoudre dans J l'équation : $g^{-1}(x)=2$.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2-\sqrt[3]{x^2-1}$.

①- a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Calculer : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)$.

②- Etudier la continuité de la fonction f sur D_f .

③- Etudier les variations de f sur D_f .

④- On considère l'équation : (E): $f(x)=x$.

a - Montrer que l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $]1;2[$.

b - Montrer que : $2-\alpha=\sqrt[3]{\alpha^2-1}$.

c - Donner un encadrement de α d'amplitude 5×10^{-1} .

⑤- Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$.

a - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b - Déterminer $g^{-1}([0;1])$.

c - Calculer $(\forall x\in J)$: $g^{-1}(x)$.

Exercice 4 :

On considère la fonction g définie par : $g(x)=(x-1)^3+2$.

①- Etudier la continuité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

②- Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

③- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .

④- Déterminer $g^{-1}([-6;2])$.

⑤- Calculer $(\forall x\in J)$: $g^{-1}(x)$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0]$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}$.

①- Etudier la continuité de la fonction f sur $]-\infty;0]$.

②- Etudier les variations de la fonction f sur $]-\infty;0]$.

③- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .

④- Calculer $(\forall x\in J)$: $f^{-1}(x)$.

⑤- Montrer que l'équation $f(x)=\sqrt{2}$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]\dfrac{-2}{3};\dfrac{-1}{2}\right[$

⑥- Déduire que : $\dfrac{1}{2}\prec\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}}\prec\dfrac{2}{3}$.

idrissi405@gmail.com