Benmoussa Mohammed

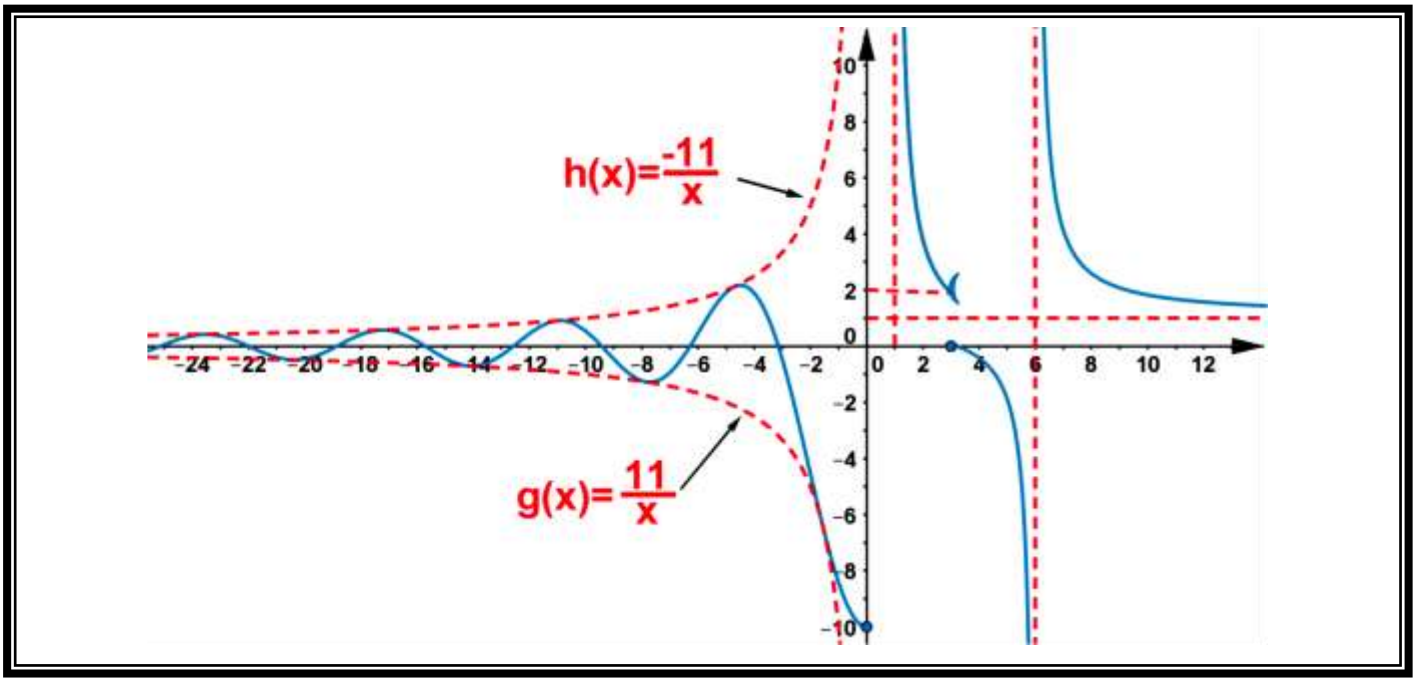
1.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 3} -x^2+4x+1$; $\lim\limits_{x\to -\infty} -5x^9-7x^3+10x^2+8$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(-3x^3+1\right)^5\left(x^4-7\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} |7-x|-4x$.
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} 9x-1-\dfrac{1}{2x^5-7}-x^4$; $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \dfrac{x^2-9}{3x-\sqrt{27}}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-4x^2+3}{4x^5-2}$
3. $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{7x+5}{x-4}$; $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{5-x}{x^2-25}$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{3x^4+x+3}{6x^4-3x+4}}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{4x^2+1}-x$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{4x^2+3}-2x$ $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x}-4}{x-16}$ $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{3-\sqrt{x+6}}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{4x}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\tan(2x)}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(2x)}{\sin(4x)}$

2.

La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f :



1. Déterminer graphiquement D_f le domaine de définition de la fonction f.
2. En déduire graphiquement les limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$
   $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ (justifier) puis interpréter ce dernier résultat .
3. ..
   a. Est-ce que la fonction f est continue à gauche du point $x_0=0$.
   b. Est-ce que la fonction f est continue à gauche du point $x_0=3$.
   c. Est-ce que la fonction f est continue à droite du point $x_0=3$.

3.

1. Etudier la continuité de f en $x_0 = 5$ avec : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-2x-15}{x^2-25} \; ; \; x \in \mathbb{R}\setminus\{-5,5\} \\ f(5) = 8 \end{cases}$.

2. Etudier la continuité de f en $x_0 = -1$ avec : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{x^3+1} \; ; \; x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ f(-1) = 3 \end{cases}$.

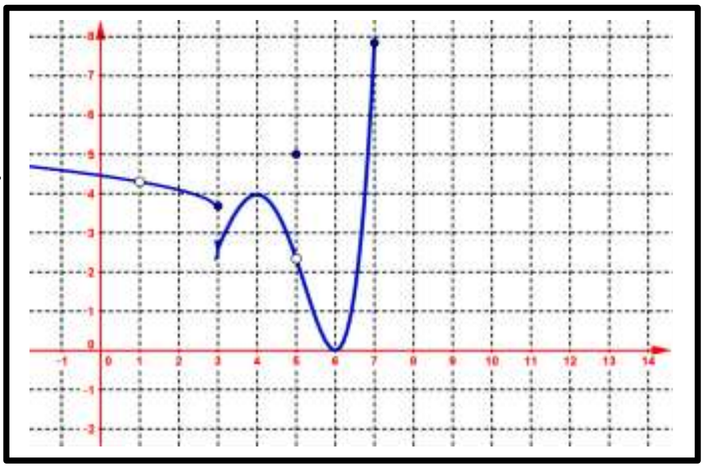
3. Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$ avec : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} \; ; \; x \in [0,+\infty[\setminus\{3\} \\ f(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$.

4. Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$ avec : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} \; ; \; x \in]0,2[\cup]2,+\infty[\\ f(2) = 8\sqrt{2} \end{cases}$.

5. Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$ avec : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} \; ; \; x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$.

6. Etudier la continuité de f à droite de $x_0 = 0$ avec : $\begin{cases} f(x) = 2\times\dfrac{1-\cos x}{x^2} \; ; \; x<0 \\ f(x) = \sqrt{x}\times\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} \; ; \; x>0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

4.



La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires .
2. Donner deux intervalles tel que on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires .
3. Trouver un intervalle , on ne peut pas appliquer le théorème des valeurs intermédiaires .
4. En déduire graphiquement le nombre des solutions $f(x) = 3$ puis donner un encadrement des solutions .

5.

Soit f la fonction numérique de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^6 + 2x^4 - 1$.

1. Montrer que : l'équation $x^6 + 2x^4 - 1 = 0$ admet au moins une solution sur $]0;1[$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-6x^2+9x+1$.

a. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que : l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ on note cette solution par α . déterminer un encadrement de α .

c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[1,+\infty[$.

6.

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x+1} \ ; \ 0\le x<\dfrac{1}{2} \\ f(x)=2x+ax^2 \ ; \ \dfrac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$ avec a est réel donné .

1. Déterminer la valeur de a pour que f est continue en $x_0=\dfrac{1}{2}$.

7.

Soit f la fonction numérique de la variable x définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau est le suivant :

x	$-\infty$	-6	-2	5	7	$+\infty$
$f(x)$	1 $\searrow$	-10 $\nearrow$	7 $\searrow$	-4 $\nearrow$	-2 $\searrow$	$-\infty$

1. Déterminer le nombre des solutions : $x\in\mathbb{R} / f(x)=0$.

2. Déterminer le nombre des solutions : $x\in\left]-\infty,5\right] / f(x)=3$.

3. Déterminer la valeur de la solution $x\in\mathbb{R} / f(x)=7$.

4. Déterminer : $f(\left]-\infty;-6\right])$ et $f(\left]-\infty;-2\right])$ et $f([-6,-2])$ et $f(\left]7,+\infty\right[)$ et $f(\mathbb{R})$.

5. Est-ce qu'une restriction g de la fonction f sur $I=I=\left]-\infty,-6\right]$ admettra une fonction réciproque .

6. Est-ce qu'une restriction h de la fonction f sur $I=\left]-2,7\right[$ admettra une fonction réciproque .

8.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x^2-4x+1$.

1. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que : l'équation $f(x)=0$ admet trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

9.

1. Montrer que : $\sqrt[4]{3}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[12]{3^9\times 2^8}=6$.

2. Mettre le dominateur rationnel $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}-1}$.

10.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$.

2. $f(x)=\sqrt[5]{(x+7)(x-1)}$.

3. $f(x)=\sqrt[3]{4-x}-\sqrt{x+1}$.

11.

1. On considère l'équation suivante : $(E)\ :\ \sqrt[3]{x+1}-2=0$
   - a. Déterminer l'ensemble de définition de l'équation (E) .
   - b. Résoudre l'équation (E) .
2. Résoudre l'équation : $(x+5)^3=2$.

12.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[5]{x^4+1}$ et $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{\sqrt[6]{4-x}}{x}$ et $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x}{\sqrt[5]{x-2}}$.

2. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^4+x+1}-\sqrt[5]{x^6+2}$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x^2}-3}{x^2}$.

13.

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par : $f(x)=x-\sqrt[3]{1+x}$.

1. ..
   - a. Déterminer domaine de définition de f .
   - b. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat .
2. Calculer : $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)+1}{x+1}$ puis interpréter géométriquement le résultat .

14.

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{7+x} & ;\ x<1 \\ f(x)=\dfrac{4}{1+\sqrt{x}} & ;\ x\geq1 \end{cases}$.

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat .
2. Etudier la continuité de f au point $x_0=1$.

15.

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par : $f(x)=2\sqrt{x+1}-x$.

1.
   - a. Déterminer D_f domaine de définition de f .
   - b. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

c. Montrer que : f est continue sur D_f .

2. ..

a. Etudier la dérivabilité à droite de la fonction f au point $x_0 = -1$.

b. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$ sur $]-1,+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur D_f .

d. Montrer que : l'équation $[0,+\infty[\ ;\ f(x)=0$ admet une unique solution .

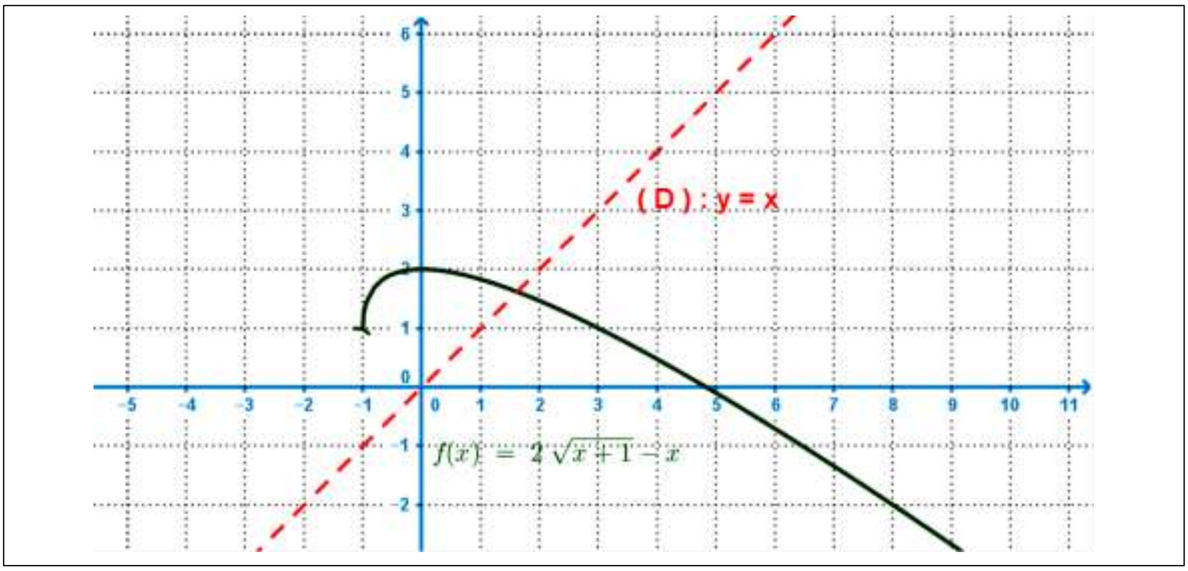
3. .. Soit g la restriction de f sur $[0,+\infty[$.

a. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .

b. Montrer que : la fonction réciproque g^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

c. Calculer : $g(3)$ et $\left(g^{-1}\right)'(1)$.

d. La figure ci-contre représente la courbe représentative de la fonction f .Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $\left(C_{g^{-1}}\right)$ de la restriction g^{-1} de la fonction f .



4. ..

a. Vérifier que : $f(x) = 2-\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$ pour tout x de $[0,+\infty[$.

b. Déterminer : $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .

5. ..

a. Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions (si on a de solutions) des équations suivantes :

- $x \in]-1,+\infty[\ ;\ f(x)=5$.
- $x \in]-1,+\infty[\ ;\ f(x)=\dfrac{3}{2}$.
- $x \in]-1,+\infty[\ ;\ f(x)=-1$