

## Exercices avec solutions : LIMITES ET CONTINUITÉ

**Exercice1 :** Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 1}{2x - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

**Solutions :** 1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 1}{2x - 1} = \frac{3}{1} = 3$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x \quad ?$$

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty$

Et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

on trouve une forme indéterminée :  $+\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} \text{ or } x \rightarrow +\infty \text{ donc } |x| = x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \text{ On pose } x - \frac{\pi}{4} = h$$

donc  $x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

$$\text{or : } \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$

**Exercice2 :** (Limites à droite et à gauche)

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2 - 1|}$

Etudier la limite de  $f$  en  $x_0 = -1$

**Solution :** Déterminons  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  ?

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$\text{Si : } -1 < x < 1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -\frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{Si : } x < -1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = 0 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

**Exercice3 :** Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2 + x) \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2 + 1}{(x-3)^2}(\sqrt{x} + 1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de  $k$

**Solution :**

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1 = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2} -3x^2+x = -10$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2+x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

- 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ?$  et  $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

- 2)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) ?$  et  $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}+1 = \sqrt{3}+1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3} -2x^2+1 = -17 \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+ \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2+1 = 1$  et

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$

et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$

4)  $k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$  donc :  $D_k = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} -3x+1 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2-2x = 0$

Etude du signe de :  $x^2 - 2x$

|          |           |   |   |           |
|----------|-----------|---|---|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |
| $x(x-2)$ | +         | 0 | - | 0         |

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x = 0^-$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x = 0^+$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -3x+1 = -5 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x = 0^-$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = +\infty$

**Exercice4 :** Considérons la fonction  $f$  définie

par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-1}; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = -4 \end{cases}$$

1) Déterminer  $Df$  2) a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b) Comparer  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  et  $f(1)$

**Solution :1)**  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2)a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-6x+5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-5)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x-5 = -4$$

2) b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

On dit que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$

**Exercice5 :** Considérons la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}; \text{ si } x \neq 3 \text{ et } f(3) = 7$$

Etudier la  $f$  est continuité de  $f$  en  $x_0 = 3$

**Solution :** on a :  $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3} = x+4$  D.EC

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} x+4 = 7 = f(3)$$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

Donc :  $f$  est continue en  $x_0 = 3$

**Exercice6 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{Par : } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

Etudier la  $f$  est continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

**Solution :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)\tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 1 \times \frac{1}{2} = f(0)$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Donc  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

**Exercice7 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{Par : } f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \text{ et } f(2) = \frac{1}{2}$$

Etudier la  $f$  est continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = \frac{1}{2} = f(2) \text{ Alors : }$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{ Donc } f \text{ est continue en } x_0 = 2$$

**Exercice8 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{Par : } \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1}; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases}$$

avec  $m$  paramètre réel

déterminer la valeur du réel  $m$  pour laquelle  $f$  est continue en  $x_0 = 1$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$$

on pose :  $h = x-1 \Rightarrow x \rightarrow 1 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(h+1))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi h + \pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi h)}{\pi h} \pi = -\pi$$

donc  $f$  est continue en  $x_0 = 1$ ssi  $m = -\pi$

**Exercice9 :** Considérons la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right); \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 2$$

Etudier la  $f$  est continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

$$\text{Solution : } x \in \mathbb{R}^* \quad \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1 \text{ donc :}$$

$$\left| f(x) - 2 \right| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2 \text{ et on a } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0)$$

Donc  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

**Exercice10 :** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2; \text{ si } x \leq 0 \\ f(1) = 2 + x; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Etudier la  $f$  est continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 = f(0)$$

donc  $f$  est continue à gauche de  $x_0 = 0$

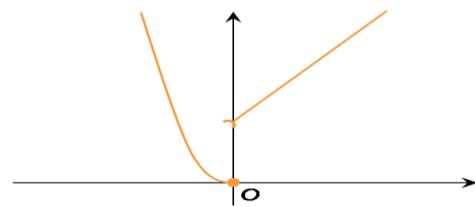
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + x = 2 \neq f(0)$$

donc  $f$  n'est pas continue à droite de 0

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Donc, la limite en 0 n'existe pas.

Conséquence :  $f$  est discontinue en 2



Graphiquement : La courbe de  $f$  ne peut être tracée sur un intervalle comprenant 0, « sans lever le crayon ».

**Exercice11 :** Soit  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2; \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2-3}{2x-1}; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Etudier la  $f$  est continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-3}{2x-1} = 3 = f(0)$$

donc  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3 - x^2 = 3 = f(0)$$

donc  $f$  est continue à gauche de  $x_0 = 0$

donc  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

**Exercice12 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{Par : } \begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{7-3x}; \text{ si } x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}; \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Etudier la  $f$  est continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$

**Solution :** on a :  $f(2) = \frac{2 \times 2 + 1}{7 - 3 \times 2} = \frac{5}{7 - 3 \times 2} = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 3 = 5 = f(2)$$

Donc  $f$  est continue adroite de  $f$  en  $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{7-3x} = \frac{5}{1} = 5 = f(2)$$

Donc  $f$  est continue gauche en  $x_0 = 2$

Donc  $f$  est continue en  $x_0 = 2$

**Exercice 13 :** Soit la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \text{ si } x \neq 1 \text{ et } f(1) = 2$$

Etudier la la continuité de  $f$  en  $x_0 = 1$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x + 1 = 2 = f(1)$$

donc  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -(x+1) = -2 \neq f(1)$$

donc  $f$  n'est pas continue à gauche de  $x_0 = 1$

donc  $f$  n'est pas continue en  $x_0 = 1$

On dit que  $f$  est discontinue en  $x_0 = 1$

**Exercice 14 :** Soit la fonction  $h$  définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

2- Déterminer la limite  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ,  $f$  est-elle continue en  $x_0 = -1$  ?

3- Soit la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

a) Déterminer  $D_f$

b) Etudier la continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = -1$  La fonction  $f$  s'appelle un prolongement par continuité de la fonction de  $f$  en  $-1$

4- Peut-on prolonger  $f$  par continuité en  $a = -2$

**Solution :** 1)

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq -2$$

Donc :  $D_f = \mathbb{R} - \{-1; -2\}$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x+2} = 3$$

$-1 \notin D_f$  donc  $f$  n'est pas continue en  $x_0 = -1$

$$3) \text{ a) } \begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases} \text{ donc : } D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3 = f(-1)$$

donc  $f$  est continue en  $x_0 = -1$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^3 + 1 = -7$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + 3x + 2 = 0^- \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

Donc on ne peut pas prolonger  $f$  par continuité en  $a = -2$

**Exercice 15 :** Soit  $f$  une fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \text{ Donner un prolongement par}$$

continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 0$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times x = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Donc La fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Est une prolongement par continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 0$

**Exercice 16 :** Etudier la la continuité des fonctions suivantes :

$$1) h(x) = \sqrt{x^2 + x + 3} \quad 2) g(x) = \frac{x^4 + x^3 - 6}{x^2 + 2x - 3}$$

$$3) t(x) = \tan x$$

$$\text{Solution : } 1) h(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$$

$x^2 + x + 3$  Est continue sur  $\mathbb{R}$  car c'est une

Fonction polynôme

de plus ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) ( $x^2 + x + 3 \geq 0$ )

(Son discriminant  $\Delta$  est négatif)

Donc  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$

2)  $g(x) = \frac{x^4 + x^3 - 6}{x^2 + 2x - 3}$  est continue sur :

$]-\infty, -3[$  et sur  $]-3, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$ .

3) La fonction  $t$  est continue sur tous les intervalles de la forme :  $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$  (Où  $k \in \mathbb{Z}$ )

**Exercice 17 :** Etudier la continuité des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$

2)  $g(x) = \sqrt{\frac{x}{1 + \sin^2 x}}$  3)  $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$

**Solution :** 1) Soit  $f$  une fonction définie par  $f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$

Montrons que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Puisque les fonctions :  $f_1 : x \rightarrow 2x^2 - 3x + 4$  et  $f_2 : x \rightarrow \cos x$  sont continues sur  $\mathbb{R}$

Et  $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$  alors :  $f = f_2 \circ f_1$  est continue sur  $\mathbb{R}$

2) Soit  $g$  une fonction définie par

$g(x) = \sqrt{\frac{x}{1 + \sin^2 x}}$  Montrons que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$

On a :  $D_g = [0; +\infty[$  et Puisque la fonction :

$g_1 : x \rightarrow \frac{x}{1 + \sin^2 x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et

$g_1(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$  et  $g_2 : x \rightarrow \sqrt{x}$  sont continues sur  $\mathbb{R}^+$

Donc :  $g = g_2 \circ g_1$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$

3)  $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car

$x \rightarrow x^2 + 1$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annule pas

sur  $\mathbb{R}$  donc :  $x \rightarrow \frac{1}{x^2 + 1}$  est continue sur  $\mathbb{R}$

et ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) ( $\frac{1}{x^2 + 1} \in \mathbb{R}$ ) et  $\sin$  est continue sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 18 :** Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1 - \cos x}{x^2}\pi\right)$  2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

**Solution :** 1)

Soient :  $f : x \rightarrow \frac{1 - \cos x}{x^2}\pi$  et  $g : x \rightarrow \sin x$

Puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}\pi = \frac{\pi}{2}$   $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Donc continue en  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1 - \cos x}{x^2}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

2) puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi \sqrt{\frac{1 - 1/x}{1 + 1/x}} = \pi$

Et la fonction :  $x \rightarrow \cos x$  continue en  $\pi$

donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) = \cos \pi = -1$

**Exercice 19 :** Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right)$  2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right)$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}}$

**Solution :** 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \tan x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{3} \frac{\tan x}{x} = \frac{\pi}{3}$

et Puisque :  $x \rightarrow \cos x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Donc continue en  $x_0 = \frac{\pi}{3}$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2}{4x^2} = \frac{\pi}{4}$

et Puisque :  $x \rightarrow \sin x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Donc continue en  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  donc :

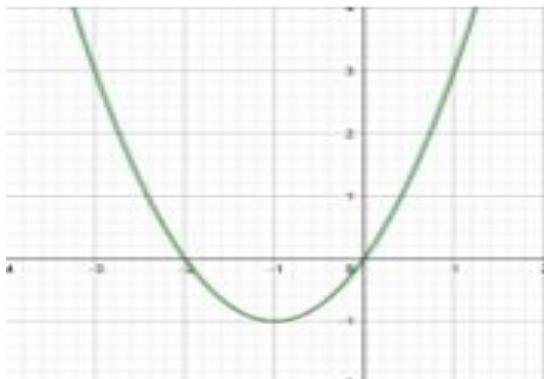
$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{0}$  donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x^2}{1 - \cos x} = 4$

donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}} = 2 : x \rightarrow \sqrt{x}$  est continue en 4

donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}} = \sin 2$  car :  $x \rightarrow \sin x$  est continue en 2

**Exercice20 :** Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction  $f(x) = x^2 + 2x$



Déterminer graphiquement les images des intervalles :  $[-1, 2]$  ,  $[0, 2[$  ;  $]1, 0]$   
 $[2, +\infty[$  ;  $]-\infty, 1]$

**Solution :** Graphiquement on a :  $f([-1, 2]) = [-1, 3]$

$$f([0, 2[) = [-1, 0] \quad f(]-1, 0]) = [0, 3[$$

$$f([2, +\infty[) = [0, +\infty[ \quad f(]-\infty, 1]) = [-1, +\infty[$$

**Exercice21 :** Soit  $f$  une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

Déterminer les images des intervalles suivants :  $[0, 1]$  ;  $[-2, -1[$  ;  $] -1, 1 ]$  ;  $[2, +\infty[$

**Solution :**  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+3=5 > 0 \text{ donc } f \text{ continue et}$$

strictement croissante sur les intervalles  $]-\infty; -1[$

$$\text{et } ]-1; +\infty[ \text{ donc on a : } f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = \left[ -3; \frac{-1}{2} \right]$$

$$f([-2; -1[) = \left[ f(-2); \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) \right] = [7; +\infty[$$

$$f(]-1; 1]) = \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x); f(1) \right] = \left[ -\infty; \frac{-1}{2} \right]$$

$$f([2; +\infty[) = \left[ f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = \left[ \frac{1}{3}; 2 \right]$$

**Exercice22 :** Montrer que l'équation :

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0 \text{ admet une racine dans chacune}$$

des intervalles suivants :  $]-1; -\frac{1}{2}[$  ;  $]-\frac{1}{2}; 0[$  et  $]0; 1[$

**Solution :** on considère la fonction :  $g$  tel que

$$g(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$$

• On a :  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur tout intervalle de  $\mathbb{R}$

○ Et on a :  $g(-1) = -\frac{3}{2}$  et  $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$  donc :

$g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(-1) < 0$  donc d'après le (T.V.I)

il existe  $\alpha_1 \in \left]-1; -\frac{1}{2}\right[$  tel que :  $g(\alpha_1) = 0$

○ Et on a :  $g(0) = -\frac{1}{2}$  et  $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$  donc :

$g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(0) < 0$  donc d'après le (T.V.I)

il existe  $\alpha_2 \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right[$  tel que :  $g(\alpha_2) = 0$

○ Et on a :  $g(0) = -\frac{1}{2}$  et  $g(1) = \frac{1}{2}$  donc :

$g(1) \times g(0) < 0$  donc d'après le (T.V.I)

il existe  $\alpha_3 \in ]0; 1[$  tel que :  $g(\alpha_3) = 0$

donc l'équation :  $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$  admet 3 racines

différentes dans chacune des intervalles:

$]-1; -\frac{1}{2}[$  ;  $]-\frac{1}{2}; 0[$  et  $]0; 1[$

**Exercice23 :** Montrer que l'équation :

$$x^3 + x + 1 = 0$$

Admet une racine unique dans  $]-1; 0[$

**Solution :** on considère la fonction :  $f$  tel que

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

• On a :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur  $]-1; 0[$

• on a :  $f(-1) = -1$  et  $f(0) = 1$  donc :

$$f(0) \times f(-1) < 0$$

•  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$  sur  $]-1; 0[$  donc  $f$  strictement croissante sur  $]-1; 0[$

Donc : d'après le (T.V.I) l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $]-1; 0[$

**Exercice 24 :** Montrer que l'équation :  $\cos x = x$  Admet au moins une racine dans intervalle :

$$I = [0; \pi]$$

**Solution :**  $\cos x = x \Leftrightarrow \cos x - x = 0$

On pose :  $f(x) = \cos x - x$

- On a :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur  $I = [0; \pi]$
- on a :  $f(\pi) = -1 - \pi < 0$  et  $f(0) = 1$  donc :

$$f(0) \times f(\pi) < 0$$

Donc : d'après le (T.V.I)

il existe  $\alpha \in ]0; \pi[$  tel que :  $f(\alpha) = 0$

**Exercice 25 :** Montrer que l'équation :  $1 + \sin x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$$I = \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$$

**Solution :**  $1 + \sin x = x \Leftrightarrow 1 + \sin x - x = 0$

On pose :  $f(x) = 1 + \sin x - x$

- On a :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur  $I = \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$
- on a :  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4-\pi}{2} < 0$  et

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6+3\sqrt{3}-4\pi}{6} < 0 \text{ donc : } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \times f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$$

Donc : d'après le (T.V.I)

il existe  $\alpha \in \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$  tel que :  $f(\alpha) = 0$

**Exercice 26 :** on considère la fonction :  $f$  tel que  $f(x) = x^3 + x - 1$

1) Montrer que l'équation :  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation :  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]0; 1[$

3) étudier le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$

**Solution :**

1)a) On a :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est une fonction polynôme)

b)  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$  sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

$$c) \text{ on a : } f(\mathbb{R}) = f\left(]-\infty; +\infty[\right) = \left[ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = ]-\infty; +\infty[$$

et on a :  $0 \in f(\mathbb{R})$

donc d'après le (T.V.I) l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$

1) on a  $f$  est continue sur  $[0; 1]$  et

$$f(0) \times f(1) < 0 \quad (f(0) = -1 \text{ et } f(1) = 1)$$

et  $f$  strictement croissante sur  $[0; 1]$

Donc : d'après le (T.V.I) l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $\alpha \in ]0; 1[$

3) étudions le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$

1cas : si  $x \leq \alpha$  alors  $f(x) \leq f(\alpha)$  (car  $f$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ )

Donc  $f(x) \leq 0$  (car  $f(\alpha) = 0$ )

2cas : si  $x \geq \alpha$  alors  $f(x) \geq f(\alpha)$  (car  $f$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ )

Donc  $f(x) \geq 0$  (car  $f(\alpha) = 0$ )

**Exercice 27 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

1) Montrer que la fonction  $g$  la restriction de  $f$  sur intervalle  $I = ]-2; +\infty[$  admet une fonction

réciproque  $g^{-1}$  définie sur un  $J$  qu'il faut déterminer.

2) Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $J$

$$\text{Solution : 1)} \quad f(x) = \frac{x-3}{x+2} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$f'(x) = \left( \frac{x-3}{x+2} \right)' = \frac{(x-3)'(x+2) - (x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1(x+2) - 1 \times (x-3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

|         |            |           |              |
|---------|------------|-----------|--------------|
| $x$     | $-\infty$  | $-2$      | $+\infty$    |
| $f'(x)$ | +          |           | +            |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | $+\infty$ | $\nearrow 1$ |

puisque  $g$  est strictement croissante et continue sur :  $I = ]-2; +\infty[$

donc  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur  $J = g(I) = g(]-2; +\infty[) = ]-\infty; 1[$

$$2) \begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in g(I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in ]-2; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \frac{y-3}{y+2} = x \Leftrightarrow y-3 = x(y+2)$$

$$\Leftrightarrow y - xy = 2x + 3 \Leftrightarrow y(1-x) = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x+3}{1-x} \text{ Donc } g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$$

$$g^{-1} : ]-\infty; 1[ \rightarrow ]-2; +\infty[$$

$$\text{Donc : } x \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$$

**Exercice 28:** Soit  $f$  la fonction définie sur

$$I = \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[ \text{ par : } f(x) = \sqrt{2x-1}$$

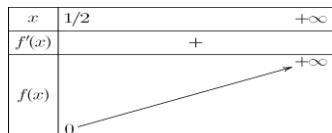
1) Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un  $J$  qu'il faut déterminer.

2) Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $J$

3) Représenter  $(C_f)$  et  $(C_{f^{-1}})$  dans le même repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\text{Solution : 1) } D_f = \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[ = I$$

$$\forall x \in \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[ \quad f'(x) = (\sqrt{2x-1})' = \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$$



Donc :  $f$  est strictement croissante et continue

$$\text{sur : } \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[ = I$$

donc  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$

définie sur  $J = f(I) = f\left(\left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[ \right) = [0; +\infty[$

$$2) \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in [0; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2y-1} = x \Leftrightarrow 2y-1 = x^2$$

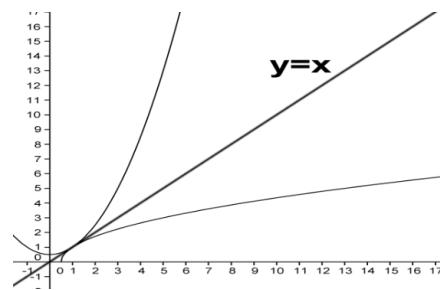
$$\Leftrightarrow 2y = x^2 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 1}{2}$$

$$\text{Donc } f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$$

$$\text{Donc : } f^{-1} : [0; +\infty[ \rightarrow \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$$

3)  $(C_{f^{-1}})$  et  $(C_f)$  sont symétriques par rapport à :  $(\Delta) y = x$



**Exercice 29 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$1) x^5 = 32 \quad 2) x^7 = -128 \quad 3) x^4 = 3 \quad 4) x^6 = -8$$

**Solutions :** 1)  $x^5 = 32$  donc  $x > 0$

$$x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2^5} \Leftrightarrow x = 2 \text{ donc : } S = \{2\}$$

$$2) x^7 = -128 \text{ donc } x < 0$$

$$\text{Donc : } x = \sqrt[7]{-128} \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{128} \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Donc : } S = \{-2\}$$

$$3) x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{3} \text{ ou } x = -\sqrt[4]{3}$$

$$\text{Donc : } S = \{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\}$$

$$4) x^6 = -8$$

On a  $x^6 \geq 0$  et  $-8 < 0$  donc  $S = \emptyset$

**Exercice 30 :** simplifier les expressions

$$\text{suivantes : 1) } (\sqrt[3]{2})^3 \quad 2) \sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$$

$$3) A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$4) B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[4]{4} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$$

$$5) C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} \quad 6) D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}}$$

$$7) E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}} \quad 8) F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt[3]{4}}$$

**Solutions :** 1)  $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$     2)  $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[2 \times 4]{2} = \sqrt[8]{2}$

$$2) A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \sqrt[5]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{2^5} - 2 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^9}} + \sqrt[4]{\frac{96}{3}}$$

$$A = 2 - 2 + \sqrt[9]{2^9} + \sqrt[5]{32} = 2 - 2 + 2 + 2 = 4$$

$$3) B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[6]{4} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2^4} \times \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$$

$$4) B = \frac{\frac{1}{2^3} \times \frac{4}{2^5} \times \frac{2}{2^6} \times \frac{1}{2^{15}}}{\sqrt[15]{2^8}} = \frac{\frac{1}{2^3} \times \frac{4}{2^5} \times \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^{15}}}{\frac{8}{2^{15}}} = \frac{\frac{23}{2^{15}}}{\frac{8}{2^{15}}} = \frac{2^{\frac{23}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = 2^{\frac{15}{15}-\frac{8}{15}} = 2^{\frac{15}{15}} = 2$$

$$5) C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{(\sqrt[3]{3})^{\frac{2}{9}} \times (\sqrt[4]{3})^{\frac{1}{4}} \times (\sqrt[2]{3})^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^1 \times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}}$$

$$C = \frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}} = 3^{\frac{20-17}{3}} = 3^3 = 3^1 = 3$$

$$6) D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 2^7 \times 10^6}{(3^3)^2}} = \sqrt[6]{\frac{10^6 \times 2^{12}}{3^6}} =$$

$$D = \sqrt[6]{\left(\frac{10}{3}\right)^6} \times \sqrt[6]{(2^2)^6} = \frac{10}{3} \times 2^2 = \frac{40}{3}$$

$$7) E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}} = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{2^3}}{\sqrt[10]{2^7}} = \frac{\sqrt[10]{2^2} \times \sqrt[10]{2^{15}}}{\sqrt[10]{2^7}} \\ = \frac{\sqrt[10]{2^{17}}}{\sqrt[10]{2^7}} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$$

$$8) F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times \left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$F = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{4^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{2^{\frac{2}{6}}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{2}{4} - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{3}}$$

$$F = 2^{\frac{2+1}{3}} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{2}$$

**Exercice 31 :** comparer :  $\sqrt[5]{2}$  et  $\sqrt[7]{3}$

**Solutions :** on a :  $\sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x^m}$

$$\sqrt[7]{3} = \sqrt[7 \times 5]{3^5} = \sqrt[35]{243} \quad \text{et} \quad \sqrt[5]{2} = \sqrt[7 \times 5]{2^7} = \sqrt[35]{128}$$

On a :  $\sqrt[35]{243} > \sqrt[35]{128}$  car  $243 > 128$

Donc :  $\sqrt[7]{3} > \sqrt[5]{2}$

**Exercice 32 :** résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$1) \sqrt[5]{3x-4} = 2 \quad 2) (\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0$$

**Solutions :** 1)

$$\sqrt[5]{3x-4} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt[5]{3x-4})^5 = (2)^5 \Leftrightarrow 3x-4 = 32 \\ \Leftrightarrow x = 12 \quad \text{donc : } S = \{12\}$$

$$2) (\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0 \quad \text{on pose : } \sqrt[5]{x} = X$$

L'équation devient :  $X^2 - 5X + 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2$$

Donc :  $\sqrt[5]{x} = 3$  ou  $\sqrt[5]{x} = 2$

Donc :  $x = 243$  ou  $x = 32$

Donc :  $S = \{32; 243\}$

**Exercice 33 :** calcule les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x-8}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1} \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2 - 2}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 1}}{\sqrt{x-1}}$$

**Solutions :**

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24} = \sqrt[5]{2^3 + 24} = \sqrt[5]{8 + 24} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)'' \quad \text{FI}$$

On a :  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1} - 1)(\sqrt[3]{x+1}^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{x(\sqrt[3]{x+1}^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - (1)^3}{x \left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x \left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2} = \frac{1}{1+1 \times 1+1} = \frac{1}{3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x-8} = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)'' \text{ FI}$$

$$\text{On a : } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - 2^3}{(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 2^2\right)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 2^2\right)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 4} = \frac{1}{12}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - 2}{x-1} - \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+6-8}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2 + 2 \times \sqrt[3]{2x+6} + 2^2\right)} - \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2 + 2 \times \sqrt[3]{2x+6} + 2^2} - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{12}$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[6]{(x^2-2)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2}} = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1=2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1=0^+$$

**Exercice34 :** simplifier les expressions suivantes :

$$1) A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}}$$

$$2) \text{a) comparer : } \sqrt[5]{4} \text{ et } \sqrt[4]{3}$$

$$\text{b) comparer : } \sqrt[3]{28} \text{ et } \sqrt{13}$$

$$\text{c) comparer : } \sqrt[5]{23} \text{ et } \sqrt[15]{151}$$

**Solutions :1)**

$$A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}} = \frac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt[5]{2^{10} \times 10^5}}{\sqrt[4]{2^6} \times \sqrt[3]{\sqrt{2^8}} \times \sqrt{2 \times 3^2}} = \frac{2^{\frac{10}{3}} \times 2 \times 10}{2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = 20$$

2) a) comparaison de :  $\sqrt[5]{4}$  et  $\sqrt[4]{3}$

$$\text{on a } \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x}$$

et on a :  $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4 \times 5]{3^5} = \sqrt[20]{243}$  et  $\sqrt[5]{4} = \sqrt[4 \times 5]{4^4} = \sqrt[20]{256}$   
donc  $\sqrt[5]{4} > \sqrt[4]{3}$  car  $256 > 243$

b) comparaison de :  $\sqrt[3]{28}$  et  $\sqrt{13}$

$$\text{on a } \sqrt[3]{28} = \sqrt[6]{28^2} = \sqrt[6]{784} \text{ et}$$

$$\sqrt{13} = \sqrt[2]{13} = \sqrt[2 \times 3]{13^3} = \sqrt[6]{2197}$$

on a  $\sqrt[6]{2197} > \sqrt[6]{784}$  car  $\sqrt{13} > \sqrt[3]{28}$

b) comparaison de :  $\sqrt[15]{151}$  et  $\sqrt[5]{23}$

$$\sqrt[5]{23} = \sqrt[15]{23^3} = \sqrt[15]{12167}$$

Donc :  $\sqrt[5]{23} > \sqrt[15]{151}$

**Exercice35 :1)** Rendre le dénominateur rationnel

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2} \quad b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} \quad c = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}$$

2) Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x$$

**Solutions :1)**

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2} \text{ on utilise : } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a = \frac{3\sqrt{2} \left( \sqrt[3]{2}^2 + 2\sqrt[3]{2} + 2^2 \right)}{\left( \sqrt[3]{2}-2 \right) \left( \sqrt[3]{2}^2 + 2\sqrt[3]{2} + 2^2 \right)} = \frac{3\sqrt{2} \left( \sqrt[3]{2}^2 + 2\sqrt[3]{2} + 2^2 \right)}{\sqrt[3]{2}^3 - 2^3}$$

$$a = \frac{3\sqrt{2} \left( \sqrt[3]{2}^3 + 2\sqrt[3]{2} + 2^2 \right)}{-6} = -\frac{\sqrt{2} \left( \sqrt[3]{2}^3 + 2\sqrt[3]{2} + 2^2 \right)}{2}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times 1 + 1^2)}$$

$$b = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \sqrt[3]{2}-1$$

$$c = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}}{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2})}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{5}\right)^3} = -\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}}{3}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2^2}}$$

$$d = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2^2}\right)} = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^3}$$

$$d = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{3}$$

2) a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$  on utilise :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1^2)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt[3]{x-1})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt[3]{x}^3 - 1^3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})} = \frac{-6}{2} = \frac{-3}{2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 + 1} - x)(\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + 1} \times 1 + x^2)}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + 1} \times 1 + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + 1} \times 1 + x^2} = 0$$

**Exercice 36 :** Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x^2 - 4} - 2}{2x^2 + x - 3}$$

**Solutions :**

$$\text{On sait que } a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$\text{Il en résulte : } a-b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$$

Par suite :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^*)$

$$\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2}y + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{20x^2 - 4} - 2}{2x^2 + x - 3} = \frac{\sqrt[4]{20x^2 - 4} - \sqrt[4]{16}}{2x^2 + x - 3}$$

$$= \frac{20x^2 - 4 - 16}{(2x^2 + x - 3)\left(\sqrt[4]{(20x^2 - 4)^3} + \sqrt[4]{(20x^2 - 4)^2} \cdot 4 + \sqrt[4]{(20x^2 - 4)16} + \sqrt[4]{16^3}\right)}$$

$$= \frac{20(x+1)}{(2x+3)\left(\sqrt[4]{(20x^2 - 4)^3} + \sqrt[4]{(20x^2 - 4)^2} \cdot 4 + \sqrt[4]{(20x^2 - 4)16} + \sqrt[4]{16^3}\right)}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x^2 - 4} - 2}{2x^2 + x - 3} = \frac{1}{8}$$

**Exercice 37:** 1) simplifier les expressions

$$\text{suivantes : } A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\text{et } B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt{9}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt{3}}}$$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\text{a) } \sqrt[3]{x-1} = 3 \quad \text{b) } x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$$

$$\text{c) } \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0$$

2) Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$$

**Solution :**

$$A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[5]{3}} = \frac{(3^5)^{\frac{1}{15}} \times (3^2)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{1}{3^5}\right)^3}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{\frac{1}{3^3} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}$$

$$A = \frac{3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{\frac{8}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{\frac{8}{5} - \frac{1}{5}} = 3^{\frac{37}{5}} = (\sqrt[15]{3})^3$$

$$B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt{9}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt{3}}} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{4}} \times (3^4)^{\frac{1}{6}}}{(3^4)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}} \times 3}{(3^4)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}}$$

$$B = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{4}{5}} \times (3)^{-\frac{1}{8}}} = 3^{\frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{1}{8}} = 3^{\frac{11}{8} - \frac{4}{5}} = 3^{\frac{55}{40} - \frac{32}{40}} = 3^{\frac{23}{40}}$$

$$B = 3^{\frac{23}{40}} = \sqrt[40]{3^{23}}$$

$$\text{2) a) } \sqrt[3]{x-1} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1})^3 = 3^3 \Leftrightarrow x-1 = 27$$

$$\Leftrightarrow x = 28 \quad \text{donc : } S = \{28\}$$

$$\text{b) } x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^2 - 7\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} - 8 = 0$$

$$\text{on pose : } x^{\frac{1}{3}} = X \quad \text{donc : } X^2 - 7X - 8 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 49 + 32 = 81 > 0$$

$$x_1 = \frac{7+9}{2 \times 1} = \frac{16}{2} = 8 \text{ et } x_2 = \frac{7-9}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{Donc : } x^{\frac{1}{3}} = 8 \text{ ou } x^{\frac{1}{3}} = -1$$

$x^{\frac{1}{3}} = -1$  n'a pas de solutions

$$x^{\frac{1}{3}} = 8 \Leftrightarrow \left( x^{\frac{1}{3}} \right)^3 = (8)^3 \Leftrightarrow x = 512$$

$$\text{Donc : } S = \{512\}$$

$$\text{c) } \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0 \text{ on a } x \geq 0$$

$$\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x^3} - \sqrt[6]{x^2} - 12 = 0$$

$$\text{on pose : } \sqrt[6]{x} = X \text{ donc : } X^3 + X^2 - 12 = 0$$

on remarque que 2 est racine de cette équation

$$\text{donc : } X^3 + X^2 - 12 = (X - 2)(X^2 + 3X + 6)$$

$$X^3 + X^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \text{ ou } X^2 + 3X + 6 = 0$$

$\Delta = -15 < 0$  donc  $X^2 + 3X + 6 = 0$  n'a pas de solutions

$$\text{Donc : } X = 2 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^6 = 64$$

$$\text{Donc : } S = \{64\}$$

$$\text{2) a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \text{ on a } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1) \left( (\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2 \right)}{(x - 1) \left( (\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left( (\sqrt[3]{x})^3 - 1^3 \right)}{(x - 1) \left( (\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2 \right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1) \left( (\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2 \right)} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\left( (\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2 \right)} = \frac{1}{1 + 1 \times 1 + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left( (\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2 \right)}{(\sqrt[3]{x+1} - 1) \left( (\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left( (\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2 \right)}{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (1)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left( (\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2 \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left( (\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2 \right) = 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

**Exercice38 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{par : } f(x) = x \cos \frac{1}{x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1) Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

2) Etudier la continuité de  $f$  sur les intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$  et est ce  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ Solution : } 1) x \in \mathbb{R}^* \quad \left| \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq 1$$

$$\text{donc : } |x| \left| \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq |x| \text{ donc : } \left| x \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq |x|$$

$$\text{donc : } -|x| \leq f(x) \leq |x|$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Donc :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

2) on a la fonction :  $f_1 : x \rightarrow \frac{1}{x}$  continue sur les intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$  et les fonctions :

$f_2 : x \rightarrow \cos x$  et  $f_3 : x \rightarrow x$  sont continués sur les intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$

Donc :  $f = f_3 \times (f_2 \circ f_1)$  est continue sur les intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$

Et puisque :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

Alors  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } x \rightarrow \cos x \text{ est continue en } x_0 = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} = \cos 0 = 1$$

$$\text{Et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos \frac{1}{x} = +\infty$$

**Exercice39 :** soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  tels que  $f$  est bornée et  $g$  continue sur  $\mathbb{R}$  ; Montrer que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$

**Solution :** 1)  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  donc il existent deux réels  $m$  et  $M$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$m \leq f(x) \leq M$$

Donc :  $f(x) \in [m; M] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc :  $g(f(x)) \in g([m; M]) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

et puisque  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  alors  $g$  est continue sur  $[m; M]$  donc il existent deux réels  $a$  et  $b$  tel que  $g([m; M]) = [a; b]$

donc  $g(f(x)) \in [a; b] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc  $a \leq g(f(x)) \leq b \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc  $a \leq (g \circ f)(x) \leq b \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc  $g \circ f$  sont bornée sur  $\mathbb{R}$

**2)** la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc :

$g(\mathbb{R}) = I$  avec  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$

et puisque  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  Donc :

$f(y) \in [m; M] \quad \forall y \in I$

Donc :  $f(g(x)) \in [m; M] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc :  $m \leq (f \circ g)(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc  $f \circ g$  sont bornée sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 40:** Considérons la fonction  $f$  continue

Sur l'intervalle  $[a; b]$  et  $x_1$  et  $x_2$  et  $x_3$  des

nombre de l'intervalle  $[a; b]$

Montrer que l'équation :

$3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$  admet au moins

une solution dans  $[a; b]$

**Solution :**

On considére la fonction  $g$  définie sur  $[a; b]$  par

$g(x) = 3f(x) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$

la fonction  $g$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$

soit  $f(\alpha)$  le plus petit des nombres  $f(x_1); f(x_2)$

;  $f(x_3)$  et soit  $f(\beta)$  le plus grand des nombres

$f(x_1); f(x_2)$  et  $f(x_3)$

On a :  $g(\alpha) = 3f(\alpha) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$

$g(\alpha) = (f(\alpha) - f(x_1)) + (f(\alpha) - f(x_2)) + (f(\alpha) - f(x_3))$

Donc :  $g(\alpha) \leq 0$

De même : on a :  $g(\beta) = 3f(\beta) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$

$g(\beta) = (f(\beta) - f(x_1)) + (f(\beta) - f(x_2)) + (f(\beta) - f(x_3))$

Donc :  $g(\beta) \geq 0$

et puisque  $g$  est continue sur  $[a; b]$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe un réel  $c$  dans  $[a; b]$  tel que :  $g(c) = 0$

Cad  $3f(c) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$

Donc l'équation  $3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$

admet au moins une solution dans  $[a; b]$

**Exercice 41 :** soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a; b]$  tels que :

$0 < g(x) < f(x) \quad \forall x \in [a; b]$

Montrer que :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$

**Solution :** Montrons que :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$  Cad :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; \lambda \leq \frac{f(x)}{g(x)} - 1$

On considéré la fonction  $h$  définie sur  $[a; b]$  par

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$  la fonction  $h$  est continue sur

l'intervalle  $[a; b]$  car  $f$  et  $g$  sont continues sur

l'intervalle  $[a; b]$  et  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a; b]$  Donc la

fonction  $h$  admet un minimum  $\lambda$  Cad il existe

$x_0 \in [a; b]$  tel que :

$\lambda = h(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - 1$  et  $\lambda \leq h(x) \quad \forall x \in [a; b]$

On a :  $0 < g(x_0) < f(x_0)$  donc  $0 < \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - 1$

donc :  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  donc :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$

**Exercice 42:** Considérons la fonction  $f$  continue

Sur l'intervalle  $[a; b]$  tel que :  $f(a) < 0$

il existe  $x_0 \in ]a; b[$  tel que :  $f(x_0) = \frac{a - x_0}{b - x_0}$

**Solution :**

On a :  $f(x_0) = \frac{a - x_0}{b - x_0} \Leftrightarrow (b - x_0)f(x_0) - (a - x_0) = 0$

On considère la fonction  $g$  définie par :  
 $g(x) = (b-x)f(x) - (a-x)$  ; la fonction  $g$  est continue sur l'intervalle  $[a;b]$  car c'est la somme de fonctions continues sur  $[a;b]$

On a :  $g(a) = (b-a)f(a) < 0$  car  $f(a) < 0$

Et  $b-a > 0$  et on a :  $g(b) = b-a > 0$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe  $x_0 \in ]a;b[$  tel

que :  $g(x_0) = 0$  cad  $f(x_0) = \frac{a-x_0}{b-x_0}$

**Exercice 43 :** Soit la fonction  $f(x) = x^2 + x + 1$

définie sur  $\mathbb{R}$ .

1- Déterminer  $J = f([0,1])$

2- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque de  $J$  vers  $[0,1]$  et déterminer  $f^{-1}(x) \forall x \in J$

**Exercice 44 :** Soit la fonction  $g(x) = x - 2\sqrt{x}$

définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

1- Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$  puis déterminer  $J = g([1, +\infty[)$

2- Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque de  $J$  vers  $[1, +\infty[$  et déterminer  $g^{-1}(x) \forall x \in J$

**Exercice 45 :** Soit la fonction  $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$

Montrer que  $h$  est une bijection de  $]-1,1[$  vers un intervalle  $J$  qu'il faut déterminer et déterminer et déterminer  $h^{-1}(x) \forall x \in J$

**Exercice 46 :**

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation:  $\sqrt[3]{x} - x = 0$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$$

3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :

$$\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$$

**Exercice 47:**

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $x^4 = 16$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $(x-1)^3 = -27$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien*

