Benmoussa Mohammed

• Continuité • à droite • à gauche

- f est continue au point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
- f est continue à droite du point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$
- f est continue à gauche du point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$
- f est continue au point x_0 équivalent à f continue à droite et à gauche de x_0

Continuité Sur intervalle

- f est continue sur un intervalle ouvert $\left(I=\left]a,b\right[\right) \Leftrightarrow$ pour tout x de I ; f est continue en x .
- f est continue sur $\left[a,b\right[\Leftrightarrow$ f est continue sur $\left]a,b\right[$ et f est continue à droite de a .
- f est continue sur $\left]a,b\right] \Leftrightarrow$ f est continue sur $\left]a,b\right[$ et f est continue à gauche de b .
- f est continue sur $\left[a,b\right] \Leftrightarrow$ f est continue sur $\left]a,b\right[$ et f est continue à droite de a et à gauche de b .

Operations sur les fonctions continues $I\subset\mathbb{R}$

f est continue sur I et g est continue sur I .

- Les fonctions $f+g$ et $f\times g$ et αf , $(\alpha\in\mathbb{R})$ sont continues sur I .
- Les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I (pour $x\in I$ tel que $g(x)\neq 0$) .

Continuités des fonctions usuelles

- Toute fonction polynôme est continue sur $D_f=\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition D_f .
- Les fonctions $f(x)=\sin x$ et $g(x)=\cos x$ sont continues sur .
- La fonction $x\mapsto \tan x$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- La fonction $f(x)=\sqrt{x}$ est continue sur $\left[0,+\infty\right[$.

Image d' un intervalle par une fonction continue

- Image du segment $[a,b]$ par une fonction continue est un segment $J=[m,M]$ (m= la plus petite image M= la plus grande image par f des éléments de $[a,b]$) $f([a,b])=[m,M]$
- Image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle J. On note $J=f(I)$.

Si la fonction est continue et strictement croissante

$f([a,b])=[f(a),f(b)]$	$f\left(\left[a,b\right[\right)=\left[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$f\left(\left]a,b\right]\right)=\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),f(b)\right]$
$f\left(\left]a,b\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$f\left(\left[a,+\infty\right[\right)=\left[f(a),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$f\left(\left]a,+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$
$f(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$f\left(\left]-\infty,a\right]\right)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),f(a)\right]$	$f\left(\left]-\infty,a\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$

Si la fonction est continue et strictement décroissante

$f([a,b])=[f(b),f(a)]$	$f\left(\left[a,b\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)\right]$	$f\left(\left]a,b\right]\right)=\left[f(b),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$f\left(\left]a,b\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$	$f\left(\left[a,+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),f(a)\right]$	$f\left(\left]a,+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$

$f(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$	$f(]-\infty,a])=\left[f(a), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$	$f(]-\infty,a[)=\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

Continuité de la composée de deux fonctions continues	• f est contine en x_0 ; • g est contine en $f(x_0)$ } alors la fonction gof est continue en x_0. • f est contine sur I ; • g est contine en $f(I)$ } alors la fonction gof est continue sur I . Applications : • $f(x)=\sin(ax+b)$ et $g(x)=\cos(ax+b)$ sont continues sur . • $h(x)=\tan(ax+b)$ est continue pour tout x tel que $ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. • si f est positive et continue sur I alors $h(x)=\sqrt{f(x)}$ est continue sur I .
théorème des valeurs intermédiaires	f est une fonction continue sur $[a,b]$. • pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe au moins un $c\in[a,b]$ $/f(c)=k$ • cas particulier : ❖ si $f(a)$ et $f(b)$ de signe contraire (càd : $f(a)f(b)<0$) alors il existe au moins un $c\in]a,b[$ $/f(c)=0$ (sans oublier que f est continue sur $[a,b]$) ❖ si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a)f(b)<0$ alors l'équation $x\in]a,b[/f(x)=0$ admet au moins une solution c dans $]a,b[$. ❖ remarque : ✓ f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$ alors c est unique ✓ pour montrer il existe au moins un c de $[a,b]$ ou bien l'équation admet au moins une solution alors il faut que la fonction est continue. ✓ pour montrer il existe un et un seul c de $[a,b]$ ou bien l'équation admet une et une seule solution alors il faut que la fonction est continue et strictement monotone.
fonction réciproque	la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. • $f : I\mapsto J$ est une fonction si tout $x\in I$ a une et seule image y dans J et de même si tout $y\in J$ a un et seul antécédent y dans I • on définie une autre fonction sera notée f^{-1} et appelée fonction réciproque de f avec : $f : I\to J=f(I)$, $x\to f(x)=y$ et $f^{-1}:J=f(I)\to I$, $y\to f^{-1}(y)=x$

Relation entre f et f^{-1}	$\left.\begin{matrix}f(x)=y\\ x\in I\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}f^{-1}(y)=x\\ y\in J\end{matrix}\right.$	$\forall x\in I: f^{-1}\circ f(x)=x$	$\forall y\in J: f\circ f^{-1}(y)=y$ ou $\forall x\in J: f\circ f^{-1}(x)=x$
Propriétés de la fonction f^{-1}	La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $J=f(I)$	La fonction réciproque f^{-1} et f varient dans le même sens	$(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à la 1er bissectrice ($(D): y=x$)
La fonction racine d'ordre n	• La fonction $f(x)=x^n$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.		

- Sa fonction réciproque f^{-1} sera noté $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ et appelée La fonction racine d'ordre n (ou la fonction racine $n^{\text{ième}}$) .
- $f^{-1}=\sqrt[n]{\ }$: $[0,+\infty[\ \to [0,+\infty[$

$$x\mapsto f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$$

- Cas $n=1$ on a $f^{-1}(x)=\sqrt[1]{x}=x$ (sans importance) .
- Cas $n=2$ on a $f^{-1}(x)=\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$ (racine carrée) .
- Cas $n=3$ on a $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ (racine cubique ou racine d'ordre 3)
- $\sqrt[n]{a}$ on l'appelle racine d'ordre n du réel positif a

Propriété du racine d'ordre n ($\forall a\in\mathbb{R}^+$ $\forall b\in\mathbb{R}^+$)

$\sqrt[n]{1}=1$; $\sqrt[n]{0}=0$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$	$\sqrt[n]{a^n}=a$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$
$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a=b$	$\sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a\le b$	$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$	$\sqrt[n\times m]{a^m}=\sqrt[n]{a}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[a\times m]{a}$	$(b>0)$; $\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$	$(b>0)$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

Propriété du $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$

- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\ell}$
- Les deux propriétés restent vraies si on remplace $x\to x_0$ par $x\to x_0^-$; $x\to x_0^+$; $x\to\pm\infty$

Puissance rationnelle d'un nombre positif

$x\in\mathbb{R}^{+*}$ et $n\in\mathbb{N}^*$ et $m\in\mathbb{Z}$ on pose $r=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$.

- Le nombre $\sqrt[n]{x^m}$ son écriture sera de la façon suivante $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ ou encore par $\sqrt[n]{x^m}=x^r$; x^r est appelé puissance rationnelle du nombre réel positif x d'exposant r .

($0^r=0$ avec $r\neq0$) .

Propriétés $\forall a\in\mathbb{R}^{+*}$ $\forall b\in\mathbb{R}^{+*}$

$a^r\rangle 0$ avec $r,r'\in\mathbb{Q}$	$a^r=b^{r'}\Leftrightarrow r=r'$	$a^r\times a^{r'}=a^{r+r'}$	$a^r\times b^r=(a\times b)^r$
$\left(a^r\right)^{r'}=a^{r\times r'}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$	$a^{-r}=\frac{1}{a^r}$	$\frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$