Continuité d'une fonction numérique

Continuité en un point:

- f est continue en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
- f est continue à droite en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
- f est continue à gauche en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

Propriété f est continue en a $\Leftrightarrow$ f est continue à droite et à gauche en a

Continuité sur un intervalle :

- ✓ f est continue sur $]a,b[$ s'elle est continue en tout point de $]a,b[$
- ✓ f est continue sur $[a,b]$ s'elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a et continue à gauche en b

Continuité des fonctions usuelles:

- Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition
- $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$
- $x \longrightarrow \sin x$ et $x \longrightarrow \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- $x \longrightarrow \tan x$ est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.

Opération sur les fonctions continues :

Si f et g sont continues sur I

- ➢ alors les fonctions $f+g$ et $f-g$ et $f\times g$ et αf sont continues sur I , $(\alpha\in\mathbb{R})$
- ➢ si de plus g ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I

L'image d'un intervalle par une fonction continue

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

Continuité de la composée de deux fonction :

Si f est continue sur I et g continue sur J tel que $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I

Résultats **-si f est continue et positive sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I** .

-si f est continue sur I alors f^n est continue sur I . $(n \in \mathbb{N}^*)$

Théorème des valeurs intermédiaires:

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \beta \text{ entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{cases} \Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] \,;\, f(\alpha) = \beta$$

Résultats :

- f continue sur $[a,b]$
- $f(a).f(b) < 0$

$\Rightarrow$ L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[a,b]$

- f continue et strictement monotone sur $[a,b]$
- $f(a).f(b) < 0$

$\Rightarrow$ L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[a,b]$

La méthode de dichotomie

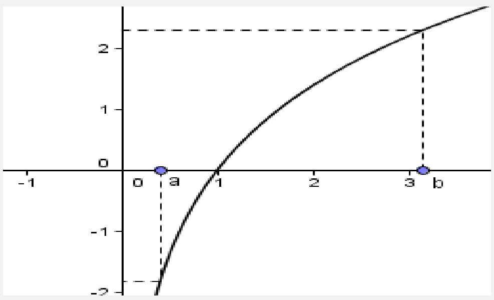
Est une méthode pour trouver une solution approchée à une équation f(x)=0. Précisément, supposons que la fonction f est continue sur l'intervalle [a,b], avec f(a)<0 et f(b)>0. On sait donc qu'il existe au moins un réel c dans l'intervalle [a,b] tel que f(c)=0.

L'idée est alors d'évaluer ce que vaut f au milieu de [a,b], et de distinguer les deux cas suivants :

- si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, alors on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$
- sinon, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ et on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$.

Ainsi, dans les deux cas, on a trouvé un intervalle de longueur moitié dans lequel est située une racine de l'équation f(x)=0. On recommence alors avec cet intervalle, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une approximation qui nous convienne

$f(\alpha) = 0 \iff (C_f)$ coupe l'axe des abscisses au point $A(\alpha, 0)$



Fonction réciproque

Propriétés :

- Si f continue et strictement monotone sur I
- Et $y \in f(I)$

$\Rightarrow$ L'équation $f(x) = y$ admet une seule solution dans I

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.

$f: I \to J$ et $f^{-1}: J \to I$

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$(\forall x \in I), f^{-1}of(x) = x$

$(\forall y \in J), fof^{-1}(y) = y$

- ✓ La fonction f^{-1} est continue sur J et a le même sens de variation de f sur I
- ✓ Les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétrique par rapport la droite (D) : $y = x$

La fonction racine n^{ieme} : $(\sqrt[n]{})$, $n \in IN^*$

$x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$

$$x^n = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{y} = x$$

- ✓ La fonction $x \longrightarrow \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$
- ✓ Cas particuliers : $\sqrt[1]{x} = x$, $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ pour tout $x \in IR^+$

Propriétés : $x, y \in IR^+$; $n, m \in IN^*$

$\sqrt[n]{x^n} = x$; $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$; $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$; $\sqrt[nm]{x^m} = \sqrt[n]{x}$

$\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$; $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ $(y \neq 0)$; $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$; $\sqrt[p]{x^{np}} = x^n$

Limites :

$lim\, f(x) = +\infty \Longrightarrow lim\, \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$; $lim\, f(x) = \ell \geq 0 \Longrightarrow lim\, \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \rightarrow \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a}^2 + \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}^2}$$

Continuité :

si f est une fonction <u>continue et positive</u> sur I alors $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I

Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif :

$n \in \mathbb{N}^*,\ m \in \mathbb{Z}$ Pour tout x de $]0, +\infty[$ on a : $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad ; \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Propriété : $r, r' \in Q \quad ; \quad x, y \in IR_+^*$

$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \quad , \quad (x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$$

$$(xy)^r = x^r \times y^{r'} \quad , \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad , \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r}$$