

Exercice 1 : (2024 SN) (3pts)

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = 4 \text{ et } U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{1 + U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) a) Vérifier que $U_{n+1} = 4 - \frac{6}{1 + U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$4 - \frac{6}{1 + U_n} = \frac{4(1 + U_n) - 6}{1 + U_n} = \frac{4U_n - 2}{1 + U_n}$$

D'où $U_{n+1} = 4 - \frac{6}{1 + U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer par récurrence que $2 \leq U_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 4$ donc $2 \leq U_0 \leq 4$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $2 \leq U_n \leq 4$ et montrons que $2 \leq U_{n+1} \leq 4$

On a $2 \leq U_n \leq 4$ et $U_{n+1} = 4 - \frac{6}{1 + U_n}$

Donc $3 \leq 1 + U_n \leq 5$ donc $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{1 + U_n} \leq \frac{1}{3}$

Donc $-\frac{6}{3} \leq -\frac{6}{1 + U_n} \leq -\frac{6}{5}$

Donc $4 - 2 \leq 4 - \frac{6}{1 + U_n} \leq 4 - \frac{6}{5}$

Donc $2 \leq U_{n+1} \leq \frac{14}{5} \leq 4$

D'où $2 \leq U_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Montrer que $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(2 - U_n)}{1 + U_n}$

Pour tout n de \mathbb{N} .

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n - 2}{1 + U_n} - U_n$$

$$= \frac{4U_n - 2 - U_n - U_n^2}{1 + U_n} = \frac{-U_n^2 + 3U_n - 2}{1 + U_n}$$

Or $(U_n - 1)(2 - U_n) = 2U_n - U_n^2 + U_n - 2$

Donc $(U_n - 1)(2 - U_n) = -U_n^2 + 3U_n - 2$

D'où $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(2 - U_n)}{1 + U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que (U_n) est décroissante et en déduire que (U_n) est convergente.

On a $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(2 - U_n)}{1 + U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Et $2 \leq U_n \leq 4$ donc $3 \leq 1 + U_n \leq 5$

$1 \leq U_n - 1 \leq 3$ et $-2 \leq 2 - U_n \leq 0$

Donc $\frac{(U_n - 1)(2 - U_n)}{1 + U_n} \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $U_{n+1} - U_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc (U_n) est décroissante.

On a (U_n) est décroissante et minorée par 2 donc elle est convergente.

3) Soit (V_n) une suite numérique définie par :

$$V_n = \frac{2 - U_n}{1 - U_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

$$V_{n+1} = \frac{2}{3} V_n ? \quad \text{on a } V_n = \frac{2 - U_n}{1 - U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{2 - U_{n+1}}{1 - U_{n+1}} \text{ donc}$$

$$2 - \frac{4U_n - 2}{1 + U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{1 - 4U_n + 2}{1 + U_n} = \frac{2 + 2U_n - 4U_n + 2}{1 + U_n - 4U_n + 2}$$

$$\text{Donc } V_{n+1} = \frac{2(2 - U_n)}{3(1 - U_n)} \text{ donc } V_{n+1} = \frac{2}{3} V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) Montrer que $U_n = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{On a } V_n = \frac{2 - U_n}{1 - U_n} \Leftrightarrow (1 - U_n)V_n = 2 - U_n$$

$$\Leftrightarrow V_n - U_n V_n = 2 - U_n \Leftrightarrow U_n(1 - V_n) = 2 - V_n$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1 + 1 - V_n}{1 - V_n} = 1 + \frac{1}{1 - V_n}$$

Donc $U_n = 1 + \frac{1}{1 - V_n}$ et (V_n) est une suite

$$\text{géométrique de raison } \frac{2}{3} ; V_0 = \frac{2 - U_0}{1 - U_0} = \frac{2 - 4}{1 - 4} = \frac{2}{3}$$

$$V_n = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

D'où $U_n = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) Calculer la limite de la suite (U_n)

$$\text{On a } \lim \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0 \quad \text{car } 0 < \frac{2}{3} < 1$$

$$\text{Donc } \lim U_n = 1 + \frac{1}{1 - 0} = 2$$

$$\text{D'où } \lim U_n = 2$$

Exercice 2 : (3pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ on considère les points $A(-1, 0, -1)$, $B(1, 2, -1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{\mathbf{n}}(2; -2; 1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon $R = 5$

1) Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P) .

Soit $M(x; y; z) \in (P)$

$\vec{\mathbf{n}}(2; -2; 1)$ est un vecteur normal à (P)

$$(P) : 2x - 2y + z + d = 0 \text{ or } \mathbf{A}(-1, 0, -1) \in (P)$$

Donc $-2 - 2 \times 0 - 1 + d = 0$ donc $d = 3$

$$\text{D'où } (P) : 2x - 2y + z + 3 = 0$$

2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) .

Soit $M(x; y; z) \in (S)$ et $R = 5$

$$(S) : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 5^2$$

$$\text{Donc } (S) : x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = 25$$

$$\text{Donc } (S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 20 = 0$$

3) a) Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est : $d(\Omega, (P)) = 3$

$$(P) : 2x - 2y + z + 3 = 0 \text{ et } \Omega(2, -1, 0)$$

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|2 \times 2 - 2 \times (-1) + 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{Donc } d(\Omega, (P)) = 3$$

b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.

On a $d(\Omega, (P)) = 3$ et $R = 5$

$$\text{Donc } d(\Omega, (P)) < R$$

Donc le plan (P) coupe la sphère suivant un cercle (Γ)

$$\text{de rayon } r = \sqrt{R^2 - (d(\Omega, (P)))^2}$$

$$\text{Donc } r = \sqrt{5^2 - 3^2} \text{ donc } r = 4$$

4) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P) .

On a $\vec{\mathbf{n}}(2; -2; 1)$ est un vecteur normal à (P) et $(\Delta) \perp (P)$

Donc $\vec{\mathbf{n}}(2; -2; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

$$\Omega(2, -1, 0)$$

Soit $M(x; y; z) \in (\Delta)$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 0 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) Montrer que le point $H(0; 1; -1)$ est le centre du cercle (Γ) .

$M(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P)$ équivaut à

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \\ 2x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$2(2 + 2t) - 2(-1 - 2t) + t + 3 = 0 \Leftrightarrow 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

$$\begin{cases} x = 2 + 2(-1) = 0 \\ y = -1 - 2(-1) = 1 \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{d'où } \mathbf{H}(0; 1; -1)$$

H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P)

Donc $\mathbf{H}(0; 1; -1)$ est le centre du cercle (Γ) .

c) Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

$\vec{\mathbf{n}}(2; -2; 1)$ est un vecteur directeur de (Δ) et $\vec{AB}(2; 2; 0)$

$$\vec{AB} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 2 \times 2 + 2 \times (-2) + 0 \times 1 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$$

Donc $(\Delta) \perp (AB)$

(Autre méthode $\mathbf{B}(1; 2; -1) \in (P)$ car $2 \times 1 - 2 \times 2 - 1 + 3 = 0$ or $\mathbf{A} \in (P)$ donc $(AB) \subset (P)$ Puisque $(\Delta) \perp (P)$ donc $(\Delta) \perp (AB)$)

$$\mathbf{A}(-1; 0; -1); \mathbf{B}(1; 2; -1); \frac{-1+1}{2} = 0 \text{ et } \frac{0+2}{2} = 1 \text{ et } \frac{-1-1}{2} = -1$$

Donc H est le milieu de $[AB]$ or $\mathbf{H} \in (P)$

Donc (P) passe par H milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à (AB) .

D'où la droite (Δ) est une médiatrice du segment

Exercice 3 : (2024 SN) (4pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $\mathbf{a} = \sqrt{3}(1 - \mathbf{i})$ $\mathbf{b} = 2 + \sqrt{3} + \mathbf{i}$

1) Vérifier que $|\mathbf{a}| = \sqrt{6}$ et que $\arg(\mathbf{a}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{3}(1 - \mathbf{i}) \text{ donc } |\mathbf{a}| = \sqrt{3}|1 - \mathbf{i}|$$

$$|1 - \mathbf{i}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc } |\mathbf{a}| = \sqrt{3}\sqrt{2} \text{ donc } |\mathbf{a}| = \sqrt{6}$$

$$\text{On a } \mathbf{a} = \sqrt{3}(1 - \mathbf{i}) \text{ donc } \mathbf{a} = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Donc } \mathbf{a} = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ donc}$$

$$\mathbf{a} = \sqrt{6}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\text{D'où } |\mathbf{a}| = \sqrt{6} \text{ et } \arg(\mathbf{a}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$2) \text{ a) Montrer que } \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\mathbf{i} \text{ puis}$$

$$\text{vérifier que } \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{1+\sqrt{3} + i(3+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3} + i(3\sqrt{3}+3)}{6}$$

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{3i(1+\sqrt{3})}{6}$$

$$\text{D'où } \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{On a } \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + i \frac{3\sqrt{3}+3}{6}$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Or } \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{D'où } \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

b) En déduire une forme trigonométrique du complexe \mathbf{b} puis vérifier que \mathbf{b}^{24} est un réel.

$$\text{On a } |\mathbf{a}| = \sqrt{6} \text{ et } \arg(\mathbf{a}) \equiv \frac{-\pi}{4}[2\pi] \text{ donc } \mathbf{a} = \sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{On a } \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ donc } \mathbf{b} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \mathbf{a}$$

$$\text{Donc } \mathbf{b} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Donc } \mathbf{b} = \frac{3\sqrt{6} + \sqrt{18}}{3} e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{Donc } \mathbf{b} = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\text{Donc } \mathbf{b} = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\text{On a } \mathbf{b}^{24} = \left((\sqrt{6} + \sqrt{2}) \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \right)^{24}$$

$$\text{Donc } \mathbf{b}^{24} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{24} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)^{24}$$

$$\text{Donc } \mathbf{b}^{24} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{24} \left(\cos 24 \frac{\pi}{12} + i \sin 24 \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\text{Donc } \mathbf{b}^{24} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{24} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$$

$$\text{Donc } \mathbf{b}^{24} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{24} \text{ et } (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{24} \in \mathbb{R}$$

D'où \mathbf{b}^{24} est un réel.

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui

transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' . On pose $R(B) = B'$, $R(A) = A'$ et $R(A') = A''$

a) Vérifier que $\mathbf{z}' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \mathbf{z}$ et que

$$\arg(\mathbf{a}') \equiv \frac{-\pi}{12}[2\pi] \text{ où } \mathbf{a}' \text{ est l'affixe du point } A'$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}' \Leftrightarrow \mathbf{z}' - 0 = e^{i\frac{\pi}{6}}(\mathbf{z} - 0)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{z}' = (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \mathbf{z} \Leftrightarrow \mathbf{z}' = (\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}) \mathbf{z}$$

$$\text{D'où } \mathbf{z}' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \mathbf{z}$$

$$\text{On a } \mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}' \Leftrightarrow \mathbf{a}' = e^{i\frac{\pi}{6}} \mathbf{a}$$

$$\arg(\mathbf{a}') \equiv \arg(e^{i\frac{\pi}{6}} \mathbf{a})[2\pi] ; \arg(e^{i\frac{\pi}{6}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

$$\arg(\mathbf{a}') \equiv \arg(e^{i\frac{\pi}{6}}) + \arg(\mathbf{a})[2\pi]$$

$$\arg(\mathbf{a}') \equiv \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ car } \arg(\mathbf{a}) \equiv \frac{-\pi}{4}[2\pi]$$

$$\text{D'où } \arg(\mathbf{a}') \equiv \frac{-\pi}{12}[2\pi]$$

$$\text{b) On a } \mathbf{R}(\mathbf{A}') = \mathbf{A}'' \Leftrightarrow \mathbf{a}'' = e^{i\frac{\pi}{6}} \mathbf{a}' \text{ or } \mathbf{a}' = e^{i\frac{\pi}{6}} \mathbf{a}$$

$$\text{Donc } |\mathbf{a}'| = \left| e^{i\frac{\pi}{6}} \mathbf{a} \right| = \left| e^{i\frac{\pi}{6}} \right| |\mathbf{a}| \text{ on a } \left| e^{i\frac{\pi}{6}} \right| = 1$$

$$\text{Donc } |\mathbf{a}'| = |\mathbf{a}| = \sqrt{6}$$

$$\text{Or } \arg(\mathbf{a}') \equiv \frac{-\pi}{12}[2\pi] \text{ donc } \mathbf{a}' = \sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$\mathbf{a}'' = e^{i\frac{\pi}{6}} \mathbf{a}' \Leftrightarrow \mathbf{a}'' = e^{i\frac{\pi}{6}} \sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{12}} \Leftrightarrow \mathbf{a}'' = \sqrt{6} e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12})}$$

$$\text{Donc } \mathbf{a}'' = \sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ or } \mathbf{b} = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}''} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{12}}} \text{ donc } \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}''} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } \frac{\mathbf{b} - 0}{\mathbf{a}'' - 0} \in \mathbb{R} \text{ donc } O, A'' \text{ et } B \text{ sont alignés.}$$

c) Montrer que \mathbf{b}' , l'affixe du point B' , vérifie

$$\mathbf{b}' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3} \right) \bar{\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{B}) = \mathbf{B}' \Leftrightarrow \mathbf{b}' = e^{i\frac{\pi}{6}} \mathbf{b} \text{ et } \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Donc } \mathbf{b}' = e^{i\frac{\pi}{6}} \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \mathbf{a} \text{ car } \mathbf{b} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b}' = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{b}' = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{2}} \sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Donc } \mathbf{b}' = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Or $\mathbf{a} = \sqrt{6}e^{-\frac{i\pi}{4}}$ donc $\bar{\mathbf{a}} = \sqrt{6}e^{\frac{i\pi}{4}}$

Or $\mathbf{b}' = \frac{3+\sqrt{3}}{3}\sqrt{6}e^{\frac{i\pi}{4}}$

D'où $\mathbf{b}' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{\mathbf{a}}$

d) En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O.

On a $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB'}) \equiv \arg\left(\frac{\mathbf{b}'-0}{\mathbf{a}-0}\right)[2\pi]$

$\arg\left(\frac{\mathbf{b}'}{\mathbf{a}}\right) \equiv \arg(\mathbf{b}') - \arg(\mathbf{a})[2\pi]$

$\mathbf{b}' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{\mathbf{a}}$ et $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) > 0$

$\arg(\mathbf{b}') \equiv \arg(\bar{\mathbf{a}})[2\pi]$ et $\arg(\bar{\mathbf{a}}) \equiv -\arg(\mathbf{a})[2\pi]$

Donc $\arg(\mathbf{b}') \equiv -\arg(\mathbf{a})[2\pi]$

Donc $\arg(\mathbf{b}') - \arg(\mathbf{a}) \equiv -2\arg(\mathbf{a})[2\pi]$

Donc $\arg(\mathbf{b}') - \arg(\mathbf{a}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ car $\arg(\mathbf{a}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc $\arg\left(\frac{\mathbf{b}'-0}{\mathbf{a}-0}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où le triangle OAB' est rectangle en O.

Exercice 4 : (2024 SN) (2pts)

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

Sept boules : 4 (1) ; 2 (2) ; 1 (3)

$\text{Card}(\Omega) = \mathbf{C}_7^2 = 21$

1) Montrer que $\mathbf{p}(\mathbf{A}) = \frac{1}{3}$, où A est l'événement « les deux boules tirées portent le même numéro »

$\text{Card}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}_4^2 + \mathbf{C}_2^2 = 7$

$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\text{Card}(\mathbf{A})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

D'où $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{1}{3}$

2) Montrer que $\mathbf{p}(\mathbf{B}) = \frac{5}{21}$, où B est l'événement « la somme des numéros des boules tirées est 4 »

$2+2=4$; $1+3=4$

$\text{Card}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}_2^2 + \mathbf{C}_4^1 \times \mathbf{C}_1^1 = 5$

$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{\text{Card}(\mathbf{B})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5}{21}$

D'où $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{5}{21}$

3) Calculer $\mathbf{p}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ « les deux boules tirées portent le même numéro et la somme des numéros des boules tirées est 4 »
 $2+2=4$

$\text{Card}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{C}_2^2 = 1$

$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \frac{\text{Card}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{21}$

4) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier

$\mathbf{P}(\mathbf{A}) \times \mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{5}{21} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{63}$

$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \frac{1}{21}$

$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \neq \mathbf{P}(\mathbf{A}) \times \mathbf{P}(\mathbf{B})$

Les événements A et B sont dépendants.

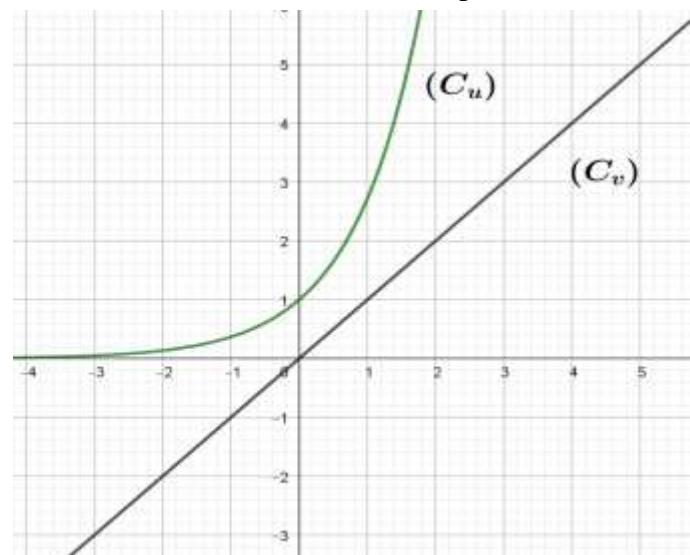
Problème: (2024 SN) (8pts)

Partie I :

On considère les deux fonctions u et v définies sur \mathbb{R} par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

1) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes (C_u) et (C_v) des fonctions u et v.

(C_v) est une droite passant par l'origine du repère (C_u) est la courbe de la fonction exponentielle.



2) Justifier graphiquement que $e^x - x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 (C_u) est strictement au-dessus de (C_v)

Donc $e^x - x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_u) , la courbe (C_v) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$

$$\mathbf{A} = \int_0^1 |u(x) - v(x)| dx \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})$$

$$\mathbf{A} = \int_0^1 |e^x - x| dx \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})$$

$$\int_0^1 (e^x - x) dx = \left[e^x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$\int_0^1 (e^x - x) dx = \left(e - \frac{1}{2} \right) - (1 - 0)$$

$$\mathbf{A} = \left(e - \frac{3}{2} \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})$$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$$

1) a) Vérifier que f est définie sur \mathbb{R} .

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^x - x > 0 \right\}$$

Or $e^x - x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$D_f = \mathbb{R}$$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$$

$$\text{Donc } f(x) = x + 1 - \ln\left(e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right)$$

$$\text{Donc } f(x) = x + 1 - \ln e^x - \ln(1 - xe^{-x})$$

$$\text{Donc } f(x) = x + 1 - x - \ln(1 - xe^{-x})$$

$$\text{D'où } f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$$

c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

$$\text{On a } f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$$

On pose $t = -x$ si $x \rightarrow +\infty$ donc $t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln(1 - xe^{-x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - \ln(1) = 1$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \ln(1 + (-x)e^{-x})$$

On pose $t = -x$ si $x \rightarrow -\infty$ donc $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - \ln(1 + te^t) = -\infty$$

Car $\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + te^t = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1 + te^t) = +\infty$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

b) Vérifier que pour tout $x < 0$,

$$f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$$

$$\text{On a } f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$$

$$f(x) = x + 1 - \ln\left(-x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right)\right)$$

$$\text{Donc } f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(-x)}{x} - \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$$

On pose $t = -x$ si $x \rightarrow -\infty$ donc $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{t} + \frac{\ln t}{t} + \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{te^t}\right) = 1$$

Car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^t = +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{te^t}\right) = \ln 1 = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - \ln t - \ln\left(1 + \frac{1}{te^t}\right) = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = -\infty$$

(C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

3) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{1 - x}{e^x - x}$

$$f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{e^x - x - e^x + 1}{e^x - x}$$

$$f'(x) = \frac{1 - x}{e^x - x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Etudier le signe de la fonction dérivée de f , puis déduire le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

$$\text{On a } f'(x) = \frac{1 - x}{e^x - x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{On a } e^x - x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$2-\ln(e-1)$	1

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-1; 0[$.

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 1]$

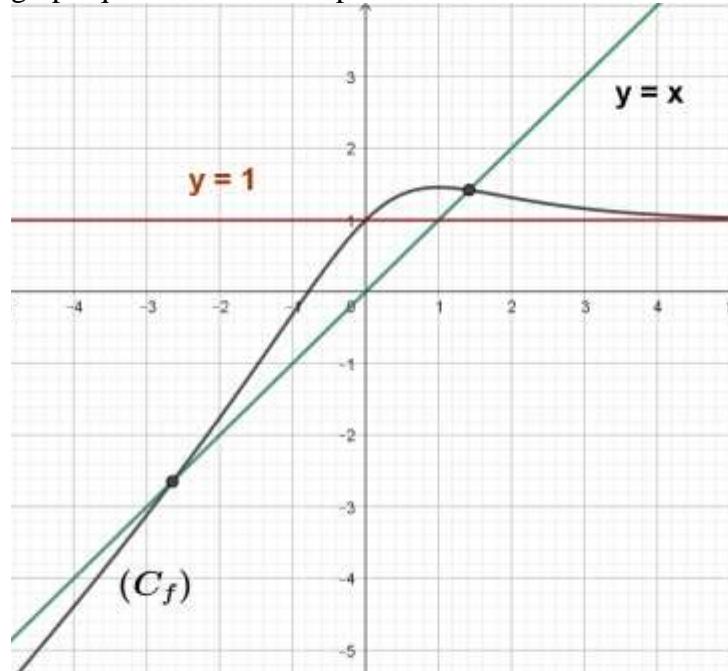
en particulier sur $[-1; 0]$ $f(0) = 1$

$$f(-1) = -\ln(1+e^{-1}) < 0 ; 1+e^{-1} > 1 \text{ et } \ln(1+e^{-1}) > 0$$

$$\text{Donc } f(0)f(-1) < 0$$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-1; 0[$.

4) La courbe (C_f) ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.



a) Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β .

La courbe (C_f) coupe la droite d'équation $y = x$ en deux points donc l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β .

b) Montrer que : $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$

α est une solution de l'équation $f(x) = x$

$$\text{Donc } f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha + 1 - \ln(e^\alpha - \alpha) = \alpha$$

$$\text{Donc } \ln(e^\alpha - \alpha) = 1 \text{ donc } \ln(e^\alpha - \alpha) = \ln(e)$$

$$\text{Donc } e^\alpha - \alpha = e$$

β est une solution de l'équation $f(x) = x$

$$\text{Donc } f(\beta) = \beta \Leftrightarrow \beta + 1 - \ln(e^\beta - \beta) = \beta$$

$$\text{Donc } \ln(e^\beta - \beta) = 1 \text{ donc } e^\beta - \beta = e$$

$$\text{Or } e^\alpha - \alpha = e$$

$$\text{Donc } e^\alpha - \alpha = e^\beta - \beta \Leftrightarrow e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$$

$$\text{D'où } e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$$

5) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-\infty; 1]$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

(Il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)

g est continue et strictement croissante sur I donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $g(I)$

$$\text{Donc } g(I) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(1) \right] =]-\infty; 2 - \ln(e-1)]$$

$$\text{Donc } g(I) =]-\infty; 2 - \ln(e-1)]$$

D'où g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J =]-\infty; 2 - \ln(e-1)]$

b) Vérifier que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$

$$\text{On a } g(0) = 1 \Leftrightarrow g^{-1}(1) = 0$$

On a g est dérivable sur I donc g est dérivable en 0

$$\text{On a } g'(0) = 1 \text{ donc } g'(0) \neq 0$$

Donc g^{-1} est dérivable en $g(0) = 1$

D'où g^{-1} est dérivable en 1

$$(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))} = \frac{1}{g'(0)} = 1$$

$$\text{D'où } (g^{-1})'(1) = 1$$