

Exercice 1 : (2024 SN) (3pts)

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = 4 \text{ et } U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{1 + U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) a) Vérifier que $U_{n+1} = 4 - \frac{6}{1 + U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$4 - \frac{6}{1 + U_n} = \frac{4(1 + U_n) - 6}{1 + U_n} = \frac{4U_n - 2}{1 + U_n}$$

$$\text{D'où } U_{n+1} = 4 - \frac{6}{1 + U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Montrer par récurrence que $2 \leq U_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 4$ donc $2 \leq U_0 \leq 4$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $2 \leq U_n \leq 4$ et montrons que $2 \leq U_{n+1} \leq 4$

$$\text{On a } 2 \leq U_n \leq 4 \text{ et } U_{n+1} = 4 - \frac{6}{1 + U_n}$$

$$\text{Donc } 3 \leq 1 + U_n \leq 5 \text{ donc } \frac{1}{5} \leq \frac{1}{1 + U_n} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } -\frac{6}{3} \leq -\frac{6}{1 + U_n} \leq -\frac{6}{5}$$

$$\text{Donc } 4 - 2 \leq 4 - \frac{6}{1 + U_n} \leq 4 - \frac{6}{5}$$

$$\text{Donc } 2 \leq U_{n+1} \leq \frac{14}{5} \leq 4$$

$$\text{D'où } 2 \leq U_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) a) Montrer que $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(2 - U_n)}{1 + U_n}$

Pour tout n de \mathbb{N} .

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{4U_n - 2}{1 + U_n} - U_n \\ &= \frac{4U_n - 2 - U_n - U_n^2}{1 + U_n} = \frac{-U_n^2 + 3U_n - 2}{1 + U_n} \end{aligned}$$

$$\text{Or } (U_n - 1)(2 - U_n) = 2U_n - U_n^2 + U_n - 2$$

$$\text{Donc } (U_n - 1)(2 - U_n) = -U_n^2 + 3U_n - 2$$

$$\text{D'où } U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(2 - U_n)}{1 + U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Montrer que (U_n) est décroissante et en déduire que (U_n) est convergente.

$$\text{On a } U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(2 - U_n)}{1 + U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Et } 2 \leq U_n \leq 4 \text{ donc } 3 \leq 1 + U_n \leq 5$$

$$1 \leq U_n - 1 \leq 3 \text{ et } -2 \leq 2 - U_n \leq 0$$

$$\text{Donc } \frac{(U_n - 1)(2 - U_n)}{1 + U_n} \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Donc } U_{n+1} - U_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc (U_n) est décroissante.

On a (U_n) est décroissante et minorée par 2 donc elle est convergente.

3) Soit (V_n) une suite numérique définie par :

$$V_n = \frac{2 - U_n}{1 - U_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

$$V_{n+1} = \frac{2}{3} V_n ? \text{ on a } V_n = \frac{2 - U_n}{1 - U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{2 - U_{n+1}}{1 - U_{n+1}} \text{ donc}$$

$$V_{n+1} = \frac{2 - \frac{4U_n - 2}{1 + U_n}}{1 - \frac{4U_n - 2}{1 + U_n}} = \frac{2 + 2U_n - 4U_n + 2}{1 + U_n - 4U_n + 2}$$

$$\text{Donc } V_{n+1} = \frac{2(2 - U_n)}{3(1 - U_n)} \text{ donc } V_{n+1} = \frac{2}{3} V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

$$\text{b) Montrer que } U_n = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } V_n = \frac{2 - U_n}{1 - U_n} \Leftrightarrow (1 - U_n)V_n = 2 - U_n$$

$$\Leftrightarrow V_n - U_n V_n = 2 - U_n \Leftrightarrow U_n(1 - V_n) = 2 - V_n$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1 + 1 - V_n}{1 - V_n} = 1 + \frac{1}{1 - V_n}$$

$$\text{Donc } U_n = 1 + \frac{1}{1 - V_n} \text{ et } (V_n) \text{ est une suite}$$

$$\text{géométrique de raison } \frac{2}{3}; V_0 = \frac{2 - U_0}{1 - U_0} = \frac{2 - 4}{1 - 4} = \frac{2}{3}$$

$$V_n = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\text{D'où } U_n = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

c) Calculer la limite de la suite (U_n)

$$\text{On a } \lim \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0 \text{ car } 0 < \frac{2}{3} < 1$$

$$\text{Donc } \lim U_n = 1 + \frac{1}{1 - 0} = 2$$

$$\text{D'où } \lim U_n = 2$$

Exercice 2 : (3pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points $A(-1, 0, -1)$, $B(1, 2, -1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2; -2; 1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon $R = 5$

1) Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).

Soit $M(x; y; z) \in (P)$

$\vec{n}(2; -2; 1)$ est un vecteur normal à (P)

(P): $2x - 2y + z + d = 0$ or $A(-1, 0, -1) \in (P)$

Donc $-2 - 2 \times 0 - 1 + d = 0$ donc $d = 3$

D'où (P): $2x - 2y + z + 3 = 0$

2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S).

Soit $M(x; y; z) \in (S)$ et $R = 5$

(S): $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 5^2$

Donc (S): $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = 25$

Donc (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 20 = 0$

3) a) Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est : $d(\Omega, (P)) = 3$

(P): $2x - 2y + z + 3 = 0$ et $\Omega(2, -1, 0)$

$d(\Omega, (P)) = \frac{|2 \times 2 - 2 \times (-1) + 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{9}{3} = 3$

Donc $d(\Omega, (P)) = 3$

b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.

On a $d(\Omega, (P)) = 3$ et $R = 5$

Donc $d(\Omega, (P)) < R$

Donc le plan (P) coupe la sphère suivant un cercle (Γ)

de rayon $r = \sqrt{R^2 - (d(\Omega, (P)))^2}$

Donc $r = \sqrt{5^2 - 3^2}$ donc $r = 4$

4) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P).

On a $\vec{n}(2; -2; 1)$ est un vecteur normal à (P) et $(\Delta) \perp (P)$

Donc $\vec{n}(2; -2; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) $\Omega(2, -1, 0)$

Soit $M(x; y; z) \in (\Delta)$

(Δ): $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 0 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b) Montrer que le point $H(0; 1; -1)$ est le centre du cercle (Γ).

$M(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P)$ équivaut à

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \\ 2x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$2(2 + 2t) - 2(-1 - 2t) + t + 3 = 0 \Leftrightarrow 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

$$\begin{cases} x = 2 + 2(-1) = 0 \\ y = -1 - 2(-1) = 1 \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{d'où } H(0; 1; -1)$$

H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P)

Donc $H(0; 1; -1)$ est le centre du cercle (Γ).

c) Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

$\vec{n}(2; -2; 1)$ est un vecteur directeur de (Δ) et $\vec{AB}(2; 2; 0)$

$\vec{AB} \cdot \vec{n} = 2 \times 2 + 2 \times (-2) + 0 \times 1 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$

Donc $(\Delta) \perp (\overline{AB})$

(Autre méthode $B(1; 2; -1) \in (P)$ car $2 \times 1 - 2 \times 2 - 1 + 3 = 0$

or $A \in (P)$ donc $(\overline{AB}) \subset (P)$ Puisque $(\Delta) \perp (P)$ donc

$(\Delta) \perp (\overline{AB})$)

$A(-1; 0; -1); B(1; 2; -1)$; $\frac{-1+1}{2} = 0$ et $\frac{0+2}{2} = 1$ et $\frac{-1-1}{2} = -1$

Donc H est le milieu de $[AB]$ or $H \in (P)$

Donc (P) passe par H milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à (AB) .

D'où la droite (Δ) est une médiatrice du segment

Exercice 3 : (2024 SN) (4pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes

respectives $a = \sqrt{3}(1 - i)$ $b = 2 + \sqrt{3} + i$

1) Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(a) \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi]$

$|a| = |\sqrt{3}(1 - i)|$ donc $|a| = \sqrt{3}|1 - i|$

$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Donc $|a| = \sqrt{3}\sqrt{2}$ donc $|a| = \sqrt{6}$

On a $a = \sqrt{3}(1 - i)$ donc $a = \sqrt{6}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$

Donc $a = \sqrt{6}(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})$ donc

$a = \sqrt{6}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$

D'où $|a| = \sqrt{6}$ et $\arg(a) \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi]$

2) a) Montrer que $\frac{b}{a} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$ puis

vérifier que $\frac{b}{a} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{b}{a} = \frac{1 + \sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3} + i(3\sqrt{3} + 3)}{6}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} + \frac{3i(1 + \sqrt{3})}{6}$$

$$\text{D'où } \frac{b}{a} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i$$

$$\text{On a } \frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} (\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} + i \frac{3\sqrt{3} + 3}{6}$$

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Or } \frac{b}{a} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i$$

$$\text{D'où } \frac{b}{a} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

b) En déduire une forme trigonométrique du complexe b puis vérifier que b^{24} est un réel.

$$\text{On a } |a| = \sqrt{6} \text{ et } \arg(a) \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi] \text{ donc } a = \sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{On a } \frac{b}{a} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ donc } b = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} a$$

$$\text{Donc } b = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Donc } b = \frac{3\sqrt{6} + \sqrt{18}}{3} e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{Donc } b = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\text{Donc } b = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) (\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$$

$$\text{On a } b^{24} = ((\sqrt{6} + \sqrt{2}) (\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}))^{24}$$

$$\text{Donc } b^{24} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{24} (\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})^{24}$$

$$\text{Donc } b^{24} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{24} (\cos 24 \frac{\pi}{12} + i \sin 24 \frac{\pi}{12})$$

$$\text{Donc } b^{24} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{24} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$$

$$\text{Donc } b^{24} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{24} \text{ et } (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{24} \in \mathbb{R}$$

D'où b^{24} est un réel.

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui

transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'. On pose R(B) = B', R(A) = A' et R(A') = A''

a) Vérifier que $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$ et que

$$\arg(a') \equiv \frac{-\pi}{12} [2\pi] \text{ où } a' \text{ est l'affixe du point } A'$$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - 0)$$

$$\Leftrightarrow z' = (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})z \Leftrightarrow z' = (\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2})z$$

$$\text{D'où } z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$$

$$\text{On a } R(A) = A' \Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{6}}a$$

$$\arg(a') \equiv \arg(e^{i\frac{\pi}{6}}a) [2\pi] \quad ; \quad \arg(e^{i\frac{\pi}{6}}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\arg(a') \equiv \arg(e^{i\frac{\pi}{6}}) + \arg(a) [2\pi]$$

$$\arg(a') \equiv \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{car } \arg(a) \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{D'où } \arg(a') \equiv \frac{-\pi}{12} [2\pi]$$

$$\text{b) On a } R(A') = A'' \Leftrightarrow a'' = e^{i\frac{\pi}{6}}a' \quad \text{or } a' = e^{i\frac{\pi}{6}}a$$

$$\text{Donc } |a'| = |e^{i\frac{\pi}{6}}a| = |e^{i\frac{\pi}{6}}| |a| \quad \text{on a } |e^{i\frac{\pi}{6}}| = 1$$

$$\text{Donc } |a'| = |a| = \sqrt{6}$$

$$\text{Or } \arg(a') \equiv \frac{-\pi}{12} [2\pi] \quad \text{donc } a' = \sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$a'' = e^{i\frac{\pi}{6}}a' \Leftrightarrow a'' = e^{i\frac{\pi}{6}} \sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{12}} \Leftrightarrow a'' = \sqrt{6} e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12})}$$

$$\text{Donc } a'' = \sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{or } b = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{b}{a''} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{12}}} \quad \text{donc } \frac{b}{a''} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } \frac{b - 0}{a'' - 0} \in \mathbb{R} \quad \text{donc } O, A'' \text{ et } B \text{ sont alignés.}$$

c) Montrer que b', l'affixe du point B', vérifie

$$b' = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3} \right) \bar{a}$$

$$R(B) = B' \Leftrightarrow b' = e^{i\frac{\pi}{6}}b \quad \text{et } \frac{b}{a} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Donc } b' = e^{i\frac{\pi}{6}} \frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} a \quad \text{car } b = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} a$$

$$b' = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})} a \Leftrightarrow b' = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{2}} \sqrt{6} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Donc } b' = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Or $a = \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $\bar{a} = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Or $b' = \frac{3+\sqrt{3}}{3}\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

D'où $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$

d) En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O.

On a $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB'}) \equiv \arg\left(\frac{b'-0}{a-0}\right)[2\pi]$

$\arg\left(\frac{b'}{a}\right) \equiv \arg(b') - \arg(a)[2\pi]$

$b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$ et $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) > 0$

$\arg(b') \equiv \arg(\bar{a})[2\pi]$ et $\arg(\bar{a}) \equiv -\arg(a)[2\pi]$

Donc $\arg(b') \equiv -\arg(a)[2\pi]$

Donc $\arg(b') - \arg(a) \equiv -2\arg(a)[2\pi]$

Donc $\arg(b') - \arg(a) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ car $\arg(a) \equiv \frac{-\pi}{4}[2\pi]$

Donc $\arg\left(\frac{b'-0}{a-0}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où le triangle OAB' est rectangle en O.

Exercice 4 : (2024 SN) (2pts)

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

Sept boules : 4 (1) ; 2 (2) ; 1 (3)

$\text{Card}(\Omega) = C_7^2 = 21$

1) Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$, où A est l'événement

« les deux boules tirées portent le même numéro »

$\text{Card}(A) = C_4^2 + C_2^2 + C_1^2 = 7$

$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

D'où $P(A) = \frac{1}{3}$

2) Montrer que $p(B) = \frac{5}{21}$, où B est l'événement

« la somme des numéros des boules tirées est 4 »

$2 + 2 = 4$; $1 + 3 = 4$

$\text{Card}(A) = C_2^2 + C_4^1 \times C_1^1 = 5$

$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5}{21}$

D'où $P(B) = \frac{5}{21}$

3) Calculer $p(A \cap B)$

$A \cap B$ « les deux boules tirées portent le même numéro et la somme des numéros des boules tirées est 4 »

$2 + 2 = 4$

$\text{Card}(A \cap B) = C_2^2 = 1$

$P(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{21}$

4) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier

$P(A) \times P(B) = \frac{5}{21} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{63}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{21}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

Les événements A et B sont dépendants.

Problème:(2024 SN) (8pts)

Partie I :

On considère les deux fonctions u et v définies sur R

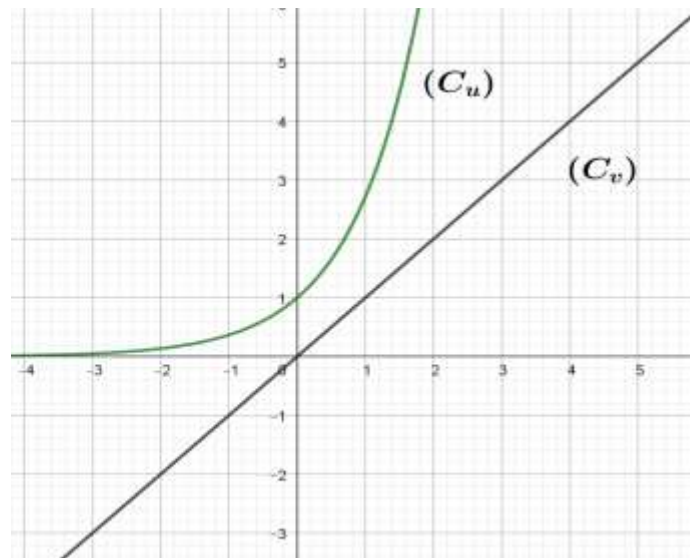
par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

1) Tracer dans un même repère orthonormé les

courbes (C_u) et (C_v) des fonctions u et v.

(C_v) est une droite passant par l'origine du repère

(C_u) est la courbe de la fonction exponentielle.



2) Justifier graphiquement que $e^x - x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 (C_u) est strictement au-dessus de (C_v)

Donc $e^x - x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_u) , la courbe (C_v) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

$A = \int_0^1 |u(x) - v(x)| dx \quad (u.a)$

$A = \int_0^1 |e^x - x| dx \quad (u.a)$

$\int_0^1 (e^x - x) dx = \left[e^x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$

$\int_0^1 (e^x - x) dx = \left(e - \frac{1}{2} \right) - (1 - 0)$

$A = \left(e - \frac{3}{2} \right) (u.a)$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$$

1) a) Vérifier que f est définie sur \mathbb{R} .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - x > 0\}$$

Or $e^x - x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$D_f = \mathbb{R}$$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$$

$$\text{Donc } f(x) = x + 1 - \ln\left(e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right)$$

$$\text{Donc } f(x) = x + 1 - \ln e^x - \ln(1 - x e^{-x})$$

$$\text{Donc } f(x) = x + 1 - x - \ln(1 - x e^{-x})$$

$$\text{D'où } f(x) = 1 - \ln(1 - x e^{-x})$$

c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

$$\text{On a } f(x) = 1 - \ln(1 - x e^{-x})$$

On pose $t = -x$ si $x \rightarrow +\infty$ donc $t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln(1 - x e^{-x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - \ln(1) = 1$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \ln(1 + (-x) e^{-x})$$

On pose $t = -x$ si $x \rightarrow -\infty$ donc $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - \ln(1 + t e^t) = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + t e^t = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1 + t e^t) = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

b) Vérifier que pour tout $x < 0$,

$$f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{x e^{-x}}\right)$$

$$\text{On a } f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$$

$$f(x) = x + 1 - \ln\left(-x \left(1 - \frac{e^x}{x}\right)\right)$$

$$\text{Donc } f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{x e^{-x}}\right)$$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe (C_f)

admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{x e^{-x}}\right)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(-x)}{x} - \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{1}{x e^{-x}}\right)$$

On pose $t = -x$ si $x \rightarrow -\infty$ donc $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{t} + \frac{\ln t}{t} + \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t e^t}\right) = 1$$

$$\text{Car } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^t = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t e^t}\right) = \ln 1 = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{x e^{-x}}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - \ln t - \ln\left(1 + \frac{1}{t e^t}\right) = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = -\infty$$

(C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

3) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$

$$f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{e^x - x - e^x + 1}{e^x - x}$$

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Etudier le signe de la fonction dérivée de f , puis déduire le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

$$\text{On a } f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{On a } e^x - x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$2 - \ln(e-1)$	1

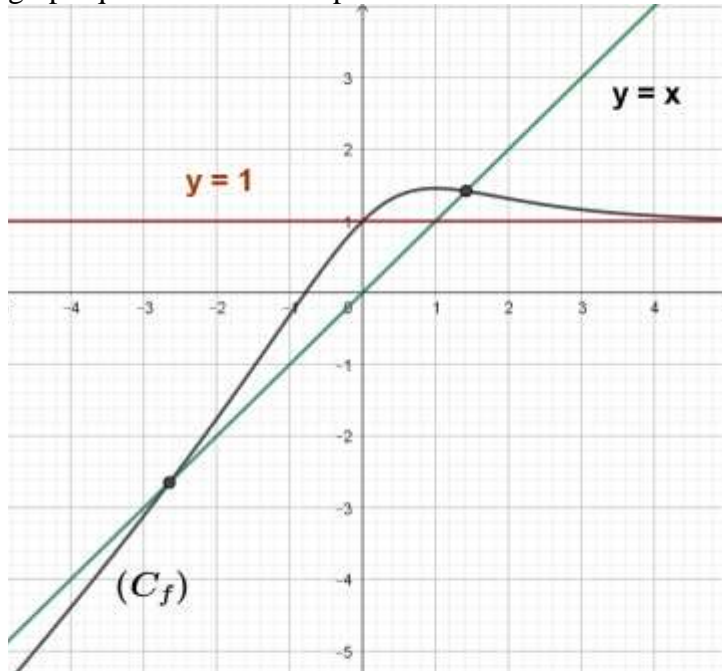
c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $] -1; 0[$.

f est continue et strictement croissante sur $] -\infty; 1]$
en particulier sur $[-1; 0]$ $f(0) = 1$

$f(-1) = -\ln(1+e^{-1}) < 0$; $1+e^{-1} > 1$ et $\ln(1+e^{-1}) > 0$
Donc $f(0)f(-1) < 0$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $] -1; 0[$.

4) La courbe (C_f) ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.



a) Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β .

La courbe (C_f) coupe la droite d'équation $y = x$ en deux points donc l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β .

b) Montrer que : $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$

α est une solution de l'équation $f(x) = x$

Donc $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha + 1 - \ln(e^\alpha - \alpha) = \alpha$

Donc $\ln(e^\alpha - \alpha) = 1$ donc $\ln(e^\alpha - \alpha) = \ln(e)$

Donc $e^\alpha - \alpha = e$

β est une solution de l'équation $f(x) = x$

Donc $f(\beta) = \beta \Leftrightarrow \beta + 1 - \ln(e^\beta - \beta) = \beta$

Donc $\ln(e^\beta - \beta) = 1$ donc $e^\beta - \beta = e$

Or $e^\alpha - \alpha = e$

Donc $e^\alpha - \alpha = e^\beta - \beta \Leftrightarrow e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$

D'où $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$

5) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-\infty; 1]$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

(Il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)

g est continue et strictement croissante sur I donc g

admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $g(I)$

Donc $g(I) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(1) \right] =]-\infty; 2 - \ln(e-1)]$

Donc $g(I) =]-\infty; 2 - \ln(e-1)]$

D'où g admet une fonction réciproque g^{-1} Définie sur $J =]-\infty; 2 - \ln(e-1)]$

b) Vérifier que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer

$(g^{-1})'(1)$

On a $g(0) = 1 \Leftrightarrow g^{-1}(1) = 0$

On a g est dérivable sur I donc g est dérivable en 0

On a $g'(0) = 1$ donc $g'(0) \neq 0$

Donc g^{-1} est dérivable en $g(0) = 1$

D'où g^{-1} est dérivable en 1

$(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))} = \frac{1}{g'(0)} = 1$

D'où $(g^{-1})'(1) = 1$