Année scolaire : 2023 – 2024	Solutions examen 2023 SR	AGOUZAL 2 BPCF-2 BSVTF

Exercice 1 : (3pts)

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = \frac{U_n - 2}{2U_n + 5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que pour tout n de N $U_n > -1$

Pour n = 0 on a $U_0 = 0$ donc $U_0 > -1$

Soit n ∈ ℕ supposons que $U_n > -1$ et montrons que $U_{n+1} > -1$ c'est-à-dire $U_{n+1} + 1 > 0$

$$U_{n+1} + 1 = \frac{U_n - 2}{2U_n + 5} + 1 = \frac{U_n - 2 + 2U_n + 5}{2U_n + 5}$$

$$= \frac{3U_n + 3}{2U_n + 5} = \frac{3(U_n + 1)}{2U_n + 5}$$

Donc $U_{n+1} + 1 = \frac{3(U_n + 1)}{2U_n + 5}$

On a $U_n > -1$ donc $U_n + 1 > 0$ donc $3(U_n + 1) > 0$

On a $U_n > -1$ donc $2U_n + 5 > 3$

Donc $\frac{3(U_n + 1)}{2U_n + 5} > 0$ donc $U_{n+1} + 1 > 0$

D'où $U_n > -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que (U_n) est décroissante, puis déduire que (U_n) est convergente.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n - 2}{2U_n + 5} - U_n$$

$$= \frac{U_n - 2 - 2U^2{}_n - 5U_n}{2U_n + 5} = \frac{-2U^2{}_n - 4U_n - 2}{2U_n + 5}$$

Donc $U_{n+1} - U_n = \frac{-2(U_n + 1)^2}{2U_n + 5}$

On a $U_n + 1 > 0$ et $2U_n + 5 > 3$

Donc $-2(U_n + 1)^2 < 0$ donc $\frac{-2(U_n + 1)^2}{2U_n + 5} < 0$

Donc $U_{n+1} - U_n < 0$

D'où (U_n) est décroissante.

On a (U_n) est décroissante et minorée par -1 donc elle est convergente.

3) On pose $V_n = \frac{3}{1 + U_n}$ pour tout n de N.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 2 puis déterminer son premier terme.

$V_{n+1} - V_n = 2$? ona $V_n = \frac{3}{1 + U_n}$

Donc $V_{n+1} = \frac{3}{1 + U_{n+1}}$ Or $U_{n+1} + 1 = \frac{3(U_n + 1)}{2U_n + 5}$

Donc $V_{n+1} - V_n = \frac{3(2U_n + 5)}{3(U_n + 1)} - \frac{3}{1 + U_n} = \frac{2(1 + U_n)}{1 + U_n}$

Donc $V_{n+1} - V_n = 2$

$V_0 = \frac{3}{1 + U_0}$ donc $V_0 = 3$

D'où (V_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $V_0 = 3$.

b) Exprimer U_n en fonction de n, pour tout n de N et déduire la limite de (U_n).

(V_n) est une suite arithmétique de raison 2 et $V_0 = 3$.

$V_n = V_0 + 2n$ donc $V_n = 2n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a $V_n = \frac{3}{1 + U_n}$ donc $1 + U_n = \frac{3}{V_n}$

Donc $U_n = \frac{3 - V_n}{V_n}$ donc $U_n = \frac{3 - 2n - 3}{2n + 3}$

D'où $U_n = \frac{-2n}{2n + 3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{-2n}{2n + 3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-2n}{2n} = -1$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} U_n = -1$

4) On pose $W_n = e^{3 - V_n}$ et $S_n = W_0 + W_1 + \ldots + W_n$ pour tout n de N.

a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

$W_n = e^{3 - V_n}$ et $V_n = 2n + 3$

$W_n = e^{3 - 2n - 3}$ donc $W_n = e^{-2n}$

$W_{n+1} = e^{-2(n+1)}$ donc $W_{n+1} = e^{-2n-2} = e^{-2} e^{-2n}$

Donc $W_{n+1} = e^{-2} W_n$

Donc (W_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-2}$ et de premier terme $W_0 = 1$

b) Calculer la limite de de la somme S_n .

On a (W_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-2}$ et de premier terme $W_0 = 1$

On a $S_n = W_0 + W_1 + \ldots + W_n$

On sait que $S_n = W_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ **et** $q = e^{-2}$ **et** $W_0 = 1$

Donc $S_n = \frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}}$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}}$$

On a $\lim_{n \to +\infty} -2(n+1) = -\infty$ on pose t = -2(n+1)

Donc $\lim_{n \to +\infty} e^{-2(n+1)} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$

D'où $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - e^{-2}}$

Exercice 2 : (3pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct, $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on considère les points A(2,1, 2), B(-2,0, 5) , C(4,-5, 7) et Ω(1,-1, 0).

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon **R = 3**

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ et en déduire que A, B, et C sont non alignés.

C(4,-5, 7) ; B(-2,0, 5) ; A(2,1, 2) ; Ω(1,-1, 0).

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\\3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-6\\5\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}-1 & -6\\3 & 5\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-4 & 2\\3 & 5\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-4 & 2\\-1 & -6\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 13\vec{i} + 26\vec{j} + 26\vec{k} = 13(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

Or $\overrightarrow{\Omega A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$ donc $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

D'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ avec $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ car $\vec{u} \neq \vec{0}$

D'où A, B, et C sont non alignés.

b) Vérifier que x + 2y + 2z - 8 = 0 est une équation cartésienne du plan (ABC).

Soit M(x ;y ;z)∈ (ABC)

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ est un vecteur normal à (ABC)

Donc $\vec{u}(1;2;2)$ est aussi est un vecteur normal à (ABC).

$(ABC): x + 2y + 2z + d = 0$ or $A(2,1,\ 2) \in (ABC)$

Donc 2 + 2 × 1 + 2 ×2 + d = 0 donc d = - 8

Donc (ABC) : 6x – 6y + 3z + 9 = 0

D'où $(ABC): x + 2y + 2z - 8 = 0$

c) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

$\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$ est un vecteur normal à (ABC)

Donc $(\Omega A) \perp (ABC)$ donc A est le projeté orthogonal de Ω sur (ABC)

Donc $d(\Omega;(ABC)) = \Omega A$

or $\overrightarrow{\Omega A}(1;2;2)$ donc $\Omega A = \sqrt{1+4+4}$ donc $\Omega A = 3$ et R = 3

Donc A ∈ (S)

$d(\Omega;(ABC)) = R$ et A ∈ (S)

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

Autre méthode

$(ABC): x + 2y + 2z - 8 = 0$ et Ω(1,-1, 0)

$$d(\Omega,(ABC)) = \frac{|1 + 2\times(-1) + 0 - 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ et } R = 3$$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

or $\overrightarrow{\Omega A}(1;2;2)$ donc $\Omega A = \sqrt{1+4+4}$ donc $\Omega A = 3$ et R = 3

Donc A ∈ (S)

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

2) Soient (P) le plan d'équation cartésienne 3x + 4y + z + 1 = 0 et (Δ) la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P).

a) Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H\left(\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2}\right)$

On a $\vec{n}(3;4;1)$ est un vecteur normal à (P) et $(\Delta) \perp (P)$

Donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Soit M(x ;y ;z)∈ (Δ)

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$H(x;y;z) \in (\Delta) \cap (P)$ équivaut à

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + t \\ 3x + 4y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$3(2 + 3t) + 4(1 + 4t) + 2 + t + 1 = 0$$

Donc

$$6 + 9t + 4 + 16t + t + 3 = 0 \Leftrightarrow 26t = -13 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ y = 1 + 4(-\frac{1}{2}) = -1 \quad \text{d'où} \quad H(\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2}) \\ z = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

b) Déterminer les coordonnées du point D tel que H soit le milieu du segment $[AD]$

H est le milieu du segment $[AD]$

Donc $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AH}$ $\quad \overrightarrow{AH}(\frac{1}{2} - 2; -2; \frac{3}{2} - 2)$

Donc $2\overrightarrow{AH}(-3;-4;-1)$ et $\overrightarrow{AD}(x_D - 2; y_D - 1; z_D - 2)$

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = -3 \\ y_D - 1 = -4 \\ z_D - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = -3 \\ z_D = 1 \end{cases}$$

D'où $D(-1;-3;1)$

3) Soit (Q) le plan passant par le point D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

$\overrightarrow{\Omega D}$ est un vecteur normal à (Q) et D ∈ (Q)

Donc $(\Omega D) \perp (Q)$ donc D est le projeté orthogonal de Ω sur (Q)

Donc $d(\Omega;(Q)) = \Omega D$ et $\overrightarrow{\Omega D}(-2;-2;1)$ donc $\Omega D = 3$

Donc D ∈ (S) et $d(\Omega;(Q)) = 3$ et R = 3

D'où le plan (Q) est tangent à la sphère (S) au point D.

b) Montrer que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC).

Soit $M(x\,;y\,;z)\in (Q)$

$\overrightarrow{\Omega D}(-2;-2;1)$ est un vecteur normal à (Q)

$(\mathbf{Q}):-2\mathbf{x}-2\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{d}=0$ or $\mathbf{D}(-1;-3;1)\in(\mathbf{Q})$

Donc $2+6+1+d=0$ donc $d=-9$

Donc (Q) : $-2x-2y+z-9=0$

D'où $(\mathbf{Q}):2\mathbf{x}+2\mathbf{y}-\mathbf{z}+9=0$

$\mathbf{B}(-2,0,\ 5)\in(\mathbf{Q})$ car $2\times(-2)+2\times0-5+9=0$

$\mathbf{C}(4,-5,\ 7)\in(\mathbf{Q})$ car $2\times4+2\times(-5)-7+9=0$

Donc $(\mathbf{BC})\subset(\mathbf{Q})$ or $(\mathbf{BC})\subset(\mathbf{ABC})$

Donc $(\mathbf{BC})\subset(\mathbf{ABC})\cap(\mathbf{Q})$

$\mathbf{A}(2,1,\ 2)\notin(\mathbf{Q})$ car $2\times2+2\times1-2+9=13\neq0$

Or $\mathbf{A}\in(\mathbf{ABC})$ donc (Q) et (ABC) ne sont pas confondus.

D'où $(\mathbf{ABC})\cap(\mathbf{Q})=(\mathbf{BC})$

<u>Exercice 3</u> :(3pts)

1) Soit le nombre complexe $\mathbf{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}\mathbf{i}$

a) Montrer que $\mathbf{a}=\sqrt{3}(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{3})$

$\mathbf{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}\mathbf{i}$ donc $|\mathbf{a}|=\sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{\dfrac{12}{4}}=\sqrt{3}$

$\mathbf{a}=\sqrt{3}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i})$ donc $\mathbf{a}=\sqrt{3}(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{3})$

b) Déduire que $\mathbf{a}^{2022}$ est un nombre réel.

On a $\mathbf{a}=\sqrt{3}(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{3})$ donc

$\mathbf{a}^{2022}=\left[\sqrt{3}(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{3})\right]^{2022}$ donc

$\mathbf{a}^{2022}=\sqrt{3}^{2022}(\cos 2022\dfrac{\pi}{3}+\mathbf{i}\sin 2022\dfrac{\pi}{3})$

$\mathbf{a}^{2022}=\left(\sqrt{3}^{2}\right)^{1011}(\cos 674\pi+\mathbf{i}\sin 674\pi)$

On a $\cos 674\pi=1$ et $\sin 674\pi=0$

Donc $\mathbf{a}^{2022}=3^{1011}$

2) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R de centre O et qui transforme B en A.

$\mathbf{A}(\mathbf{a})$ et $\mathrm{B}(\overline{\mathbf{a}})$

$\mathbf{R}(\mathbf{B})=\mathrm{A}\Leftrightarrow \mathrm{a}-0=e^{i\theta}(\overline{\mathbf{a}}-0)$ où θ est l'angle de la rotation.

Donc $\mathrm{a}=e^{i\theta}\,\overline{\mathbf{a}}\Leftrightarrow e^{i\theta}=\dfrac{\mathbf{a}}{\overline{\mathbf{a}}}$ or $\mathbf{a}=\sqrt{3}(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{3})$

Donc $\mathrm{a}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\overline{\mathrm{a}}=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

donc $\dfrac{\mathbf{a}}{\overline{\mathbf{a}}}=\dfrac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ donc $e^{i\theta}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $\theta\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$

Une mesure de l'angle de la rotation R est $\dfrac{2\pi}{3}$.

3) $(E_\alpha):z^2-\sqrt{3}\mathbf{z}+\boldsymbol{\alpha}=0$

a) Justifier que $\boldsymbol{\alpha}>\dfrac{3}{4}$ et que $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}$

On a l'équation (E_α) admet deux racines complexes conjuguées non réelles z et $\overline{\mathbf{z}}$

Donc $\Delta<0$ et $\Delta=(-\sqrt{3})^2-4\boldsymbol{\alpha}$

Donc $3-4\boldsymbol{\alpha}<0$ donc $\boldsymbol{\alpha}>\dfrac{3}{4}$

On a z et $\overline{\mathbf{z}}$ sont les solutions de l'équation (E_α)

$\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{1}$ et $\mathbf{z}+\overline{\mathbf{z}}=-\dfrac{-\sqrt{3}}{1}$ donc $\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}=\boldsymbol{\alpha}$ et $\mathbf{z}+\overline{\mathbf{z}}=\sqrt{3}$

Donc $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}$

b) Montrer que $|\mathbf{z}|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|$

On a $\mathbf{z}+\overline{\mathbf{z}}=\sqrt{3}$ donc $\overline{\mathbf{z}}=\sqrt{3}-\mathbf{z}$

Donc $|\overline{\mathbf{z}}|=|\sqrt{3}-\mathbf{z}|$ or $|\overline{\mathbf{z}}|=|\mathbf{z}|$ et $|\sqrt{3}-\mathbf{z}|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|$

D'où $|\mathbf{z}|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|$

c) En déduire que les points M et N appartiennent à la médiatrice (Δ) du segment $[\mathbf{OP}]$

On a $|\mathbf{z}|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|\Leftrightarrow|\mathbf{z}-0|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|$; $\mathbf{M}(\mathbf{z})$ et $\mathbf{P}(\sqrt{3})$

Donc $\mathbf{MO}=\mathbf{MP}$ donc $\mathbf{M}\in(\Delta)$ la médiatrice de $[\mathbf{OP}]$

$|\mathbf{z}|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|$ et $|\overline{\mathbf{z}}|=|\mathbf{z}|$ et $|\mathbf{z}-\sqrt{3}|=|\overline{\mathbf{z}-\sqrt{3}}|=|\overline{\mathbf{z}}-\sqrt{3}|$

Donc $|\overline{\mathbf{z}}|=|\overline{\mathbf{z}}-\sqrt{3}|\Leftrightarrow|\overline{\mathbf{z}}-0|=|\overline{\mathbf{z}}-\sqrt{3}|$; $\mathbf{N}(\overline{\mathbf{z}})$ et $\mathbf{P}(\sqrt{3})$

Donc $\mathbf{NO}=\mathbf{NP}$ donc $\mathbf{N}\in(\Delta)$ la médiatrice de $[\mathbf{OP}]$

d) Déterminer la valeur de α pour laquelle $|\mathbf{z}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ et déduire dans ce cas les points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

On a $|\mathbf{z}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ et $|\mathbf{z}|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|$ donc $|\mathbf{z}|=\sqrt{3}$

$|\mathbf{z}|^2=3$ or $|\mathbf{z}|^2=\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}$ et $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}$ d'où $\boldsymbol{\alpha}=3$

On a $|\mathbf{z}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ et $\mathbf{M}(\mathbf{z})$ et $\mathbf{P}(\sqrt{3})$

$\mathbf{MP}=\sqrt{3}$ donc $\mathbf{M}$ appartient au cercle (C) de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

Et on a $|\mathbf{z}-\sqrt{3}|=|\overline{\mathbf{z}}-\sqrt{3}|$ donc $|\overline{\mathbf{z}}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$

$\mathbf{NP}=\sqrt{3}$ donc $\mathbf{N}$ appartient au cercle (C) de centre P et de rayon $\sqrt{3}$.

Or $\mathbf{M}\in(\Delta)$ et $\mathbf{N}\in(\Delta)$

D'où les points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle (C) de centre P et de rayon $\sqrt{3}$ sont M et N.

Exercice 4:(3pts)

1) On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

4 B ; 2 N

$$\mathbf{Card}(\Omega) = \mathbf{C}_6^2 = 15$$

a) Calculer la probabilité de l'événement :

A ″ tirer au moins une boule noire ″

(1N et 1B) ou 2N

$$\mathbf{Card}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}_2^1 \times \mathbf{C}_4^1 + \mathbf{C}_2^2 = 8 + 1 = 9$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{Card}(\mathbf{A})}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

b) Soit l'événement B : ″Obtenir deux boules de même couleur ″ montrer que $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{7}{15}$

2B ou 2N

$$\mathbf{Card}(\mathbf{B}) = \mathbf{C}_4^2 + \mathbf{C}_2^2 = 6 + 1 = 7$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{Card}(\mathbf{A})}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{7}{15}$$

c) La probabilité pour que l'événement B soit réalisé exactement trois fois est : $\mathbf{C}_5^3(\mathbf{P}(\mathbf{B}))^3(1-\mathbf{P}(\mathbf{B}))^2$

$$\mathbf{C}_5^3(\mathbf{P}(\mathbf{B}))^3(1-\mathbf{P}(\mathbf{B}))^2 = 10\left(\frac{7}{15}\right)^3\left(\frac{8}{15}\right)^2$$

2) a) justifier que les valeurs prises par X sont 1 ; 2 et 3

X = 1 la première boule tirée est blanche et on arrête le tirage.

X = 2 la première boule tirée est noire, la deuxième est blanche et on arrête le tirage.

X = 3 la première boule et la deuxième sont noires et la troisième est blanche et on arrête le tirage.

b) Montrer que $\mathbf{P}(\mathbf{X}=2) = \frac{4}{15}$

$(\mathbf{X}=2)$:″ la première boule tirée est noire et la deuxième est blanche ″ $\mathbf{P}(\mathbf{X}=2) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$

c) les valeurs prises par X sont 1 ; 2 et 3

$(\mathbf{X}=1)$:″ la boule tirée est blanche ″

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}=1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$(\mathbf{X}=3)$ ″ la première boule et la deuxième sont noires et la troisième est blanche ″

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}=3) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{1}{15}$$

k	1	2	3
P(X=k)	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

(On a $\frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = 1$)

d) La probabilité d'obtenir au moins une boule noire est : $\mathbf{P}(\mathbf{X}=2) + \mathbf{P}(\mathbf{X}=3) = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$

Problème : (8pts)

On considère la fonction f définie sur R par :

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}-1)^2 \mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} & \mathbf{x} \leq 2 \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 1 + (\mathbf{x}-2)^2 \ln(\mathbf{x}-2) & \mathbf{x} > 2 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue au point 2.

On a $\mathbf{f}(2) = (2-1)^2 \mathbf{e}^{2(2-2)}$ donc $\mathbf{f}(2) = 1$

$$\lim_{\mathbf{x}\to 2^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to 2^+} 1 + (\mathbf{x}-2)^2 \ln(\mathbf{x}-2)$$

On pose t = x – 2 si $\mathbf{x} \to 2^+$ alors $\mathbf{t} \to 0^+$

$$\lim_{\mathbf{x}\to 2^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{t}\to 0^+} 1 + \mathbf{t}^2 \ln(\mathbf{t}) = \lim_{\mathbf{t}\to 0^+} 1 + \mathbf{t} \times \mathbf{t}\ln(\mathbf{t})$$

Donc $\lim_{\mathbf{t}\to 0^+} 1 + \mathbf{t} \times \mathbf{t}\ln(\mathbf{t}) = 1$ car $\lim_{\mathbf{t}\to 0^+} \mathbf{t}\ln(\mathbf{t}) = 0$

Donc $\lim_{\mathbf{x}\to 2^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(2)$ car $\mathbf{f}(2) = 1$

Donc f est continue à droite en 2

$$\lim_{\mathbf{x}\to 2^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to 2^-} (\mathbf{x}-1)^2 \mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} = 1$$

Donc $\lim_{\mathbf{x}\to 2^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(2)$ donc f est continue à gauche en 2. Puisque f est continue à droite en 2.

D'où f est continue en 2.

2) a) Vérifier que pour tout x < 2 et x ≠ 0

$$\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(2)}{\mathbf{x}-2} = \mathbf{x}\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} - \mathbf{x}\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} - 1}{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})}$$

Pour tout x < 2 et x ≠ 0

$$\mathbf{x}\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} - \mathbf{x}\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} - 1}{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} - \mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} + 1}{(2-\mathbf{x})}$$

$$= \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})}(2\mathbf{x} - \mathbf{x}^2 - 1) + 1}{-(\mathbf{x}-2)} = -\frac{-\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})}(\mathbf{x}-1)^2 + 1}{(\mathbf{x}-2)}$$

$$\mathbf{x}\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} - \mathbf{x}\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} - 1}{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} = \frac{(\mathbf{x}-1)^2 \mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} - 1}{(\mathbf{x}-2)} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(2)}{\mathbf{x}-2}$$

D'où $\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(2)}{\mathbf{x}-2} = \mathbf{x}\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} - \mathbf{x}\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} - 1}{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})}$

c) Montrer que f est dérivable en 2 et que $\mathbf{f}'(2) = 0$ puis interpréter les résultats géométriquement.

$$\lim_{\mathbf{x}\to 2^-} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(2)}{\mathbf{x}-2} = \lim_{\mathbf{x}\to 2^-} \mathbf{x}\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} - \mathbf{x}\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} - 1}{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} = 0$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to 2^-} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(2)}{\mathbf{x}-2} = 2\mathbf{e}^0 - 2 \times 1 = 0 \;;\quad t = x(2-x)$$

Car $\lim_{\mathbf{x}\to 2^-} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} - 1}{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})} = \lim_{\mathbf{t}\to 0^+} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{t}} - 1}{\mathbf{t}} = 1$

Donc $\lim_{\mathbf{x}\to 2^-} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(2)}{\mathbf{x}-2} = 0$

Donc f est dérivable à gauche en 2 et $\mathbf{f}_{\mathbf{g}}'(2) = 0$

c) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2)=0$ puis interpréter les résultats géométriquement

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{1+(x-2)^2\ln(x-2)-1}{x-2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\ln(x-2)$

On pose t = x – 2 si $x\to2^+$ alors $t\to0^+$

$$\lim_{x\to2^+}(x-2)\ln(x-2)=\lim_{t\to0^+}t\ln t=0$$

Donc $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$

Donc f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2)=0$

Puisque f est dérivable à droite et à gauche en 2 et $f'_g(2)=f'_d(2)=0$

D'où f est dérivable en 2 et que $f'(2)=0$

On a f est dérivable en 2 et $f'(2)=0$

Donc la courbe **(C)** admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.

3) a) Vérifier que pour tout x ≤ 2

$$f(x)=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$$

Pour tout x ≤ 2 $f(x)=(x-1)^2e^{x(2-x)}$

Donc $f(x)=(x^2-2x+1)e^{x(2-x)}$

Donc $f(x)=(x^2-2x)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

Donc $f(x)=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et interpréter géométriquement Le résultat.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x(2-x)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$$

On pose t = x(2 - x) si $x\to-\infty$ alors $t\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to-\infty}-te^t+e^t=0$$

Car $\lim\limits_{t\to-\infty}te^t=0$ et $\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ (C) admet une asymptote horizontale d'équation y = 0 au voisinage de $-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1+(x-2)^2\ln(x-2)=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)^2=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+(x-2)^2\ln(x-2)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{x^2(1-\frac{2}{x})^2\ln(x-2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+x(1-\frac{2}{x})^2\ln(x-2)=+\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-\frac{2}{x})^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-2)=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ Donc la courbe **(C)** admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

4) a) Montrer que pour tout x < 2

$$f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$$

Pour tout x < 2 $f(x)=(x-1)^2e^{x(2-x)}$

$$f'(x)=2(x-1)e^{x(2-x)}+(x-1)^2e^{x(2-x)}(x(2-x))'$$

$$f'(x)=2(x-1)e^{x(2-x)}+(x-1)^2e^{x(2-x)}(2-2x)$$

Donc $f'(x)=2(x-1)e^{x(2-x)}[1+(x-1)(1-x)]$

Donc $f'(x)=2(x-1)e^{x(2-x)}x(2-x))$

D'où $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}\quad\forall x<2$

b) Montrer que pour tout x > 2

$f'(x)=(x-2)(1+\ln(x-2))$

Pour tout x > 2 $f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2)$

$$f'(x)=2(x-2)\ln(x-2)+(x-2)^2\times\frac{1}{x-2}$$

Donc $f'(x)=(x-2)[2\ln(x-2)+1]$

D'où $f'(x)=(x-2)(1+\ln(x-2))\quad\forall x>2$

c) Résoudre dans l'intervalle $]2;+\infty[$ l'inéquation :

$$\forall x\in]2;+\infty[\quad 1+2\ln(x-2)\le0$$

$$1+2\ln(x-2)\le0\Leftrightarrow\ln(x-2)\le-\frac{1}{2}$$

$$\ln(x-2)\le-\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{\ln(x-2)}\le e^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x-2\le e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x\le2+e^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x\le2+\frac{1}{\sqrt{e}}$$

On a $x>2$ et $x\le2+\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ donc $2<x\le2+\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

D'où $S=\left]2;2+\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$

d) Etudier le signe de $f'(x)$ sur R puis dresser le tableau de variations de f sur R.

$\forall x>2 \quad f'(x)=(x-2)(1+2\ln(x-2))$

Le signe $f'(x)$ est celui de $1+2\ln(x-2)$

$\forall x>2$ on a $x-2>0$

On a $1+2\ln(x-2)\le 0 \Leftrightarrow 2<x\le 2+\frac{1}{\sqrt{e}}$

$\forall x\in\left]2;2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right] \quad f'(x)\le 0$

On a $1+2\ln(x-2)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2+\frac{1}{\sqrt{e}}$

$\forall x\in\left[2+\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right[\quad f'(x)\ge 0$

$\forall x<2 \quad f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$

$\forall x<2 \quad 2-x>0$ et $e^{x(2-x)}>0$

Le signe $f'(x)$ est celui de $x(x-1)$

$x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

$x(x-1)\le 0 \Leftrightarrow 0\le x\le 1$

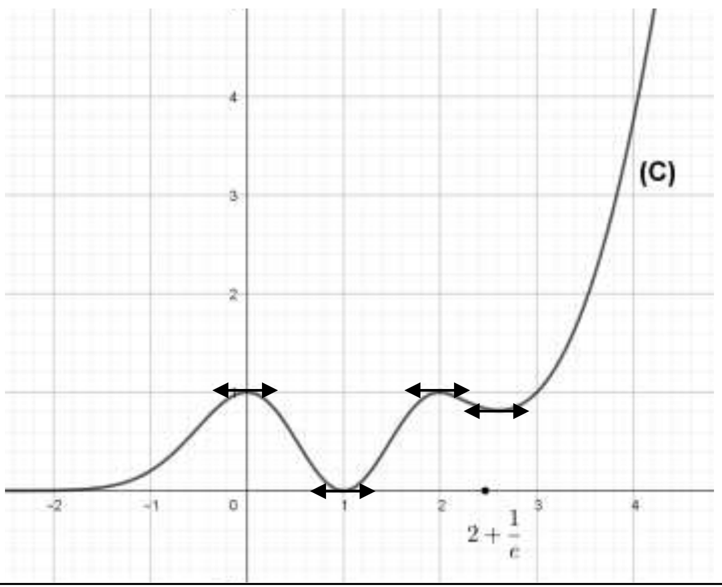
$\forall x\in[0;1] \quad f'(x)\le 0$

$x(x-1)>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;0[\cup]1;2[$

$\forall x\in]-\infty;0[\cup]1;2[\quad f'(x)>0$ et on a $f'(2)=0$

x	$-\infty$		0		1		2		$2+\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0	↗	1	↘	0,8	↗	$+\infty$

5) $f\left(2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\approx 0,8$



6) Soit $\lambda\in]2;3[$

a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_\lambda^3 (x-2)^2\ln(x-2)dx=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$$

on pose $J=\int_\lambda^3 (x-2)^2\ln(x-2)dx$

$u(x)=\ln(x-2) \qquad u'(x)=\frac{1}{x-2}$

$v'(x)=(x-2)^2 \qquad v(x)=\frac{(x-2)^3}{3}$; (x-2)'=1

$$J=\left[\frac{(x-2)^3}{3}\ln(x-2)\right]_\lambda^3-\int_\lambda^3\frac{(x-2)^3}{3}\frac{1}{x-2}dx$$

$$\Leftrightarrow J=-\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\ln(\lambda-2)-\frac{1}{3}\int_\lambda^3(x-2)^2dx$$

Donc $J=-\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\ln(\lambda-2)-\frac{1}{3}\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_\lambda^3$

Donc $J=-\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\ln(\lambda-2)-\frac{1}{9}(1-(\lambda-2)^3)$

D'où $J=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2))$

b) Déduire en fonction de λ l'aire A(λ) de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations : y = 1, x = λ et x = 3

$\forall x\in]2;3]$ (C) est en dessous de la droite d'équations : y = 1

$$A(\lambda)=\int_\lambda^3|f(x)-1|dx 1cm\times 1cm$$

$\forall x\in]2;3]$ (C) est en dessous de la droite d'équations : y = 1

$$\int_\lambda^3|f(x)-1|dx=\int_\lambda^3 1-f(x)dx$$

$$\int_\lambda^3 1-f(x)dx=\int_\lambda^3 1-1-(x-2)^2\ln(x-2)dx$$

Donc $\int_\lambda^3 1-f(x)dx=-\int_\lambda^3(x-2)^2\ln(x-2)dx$

Or $\int_\lambda^3(x-2)^2\ln(x-2)dx=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$

$$A(\lambda)=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}(\lambda-2)^3(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2))\right)cm^2$$

c) Calculer $\lim_{\lambda\to 2^+} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda\to 2^+}\frac{1}{9}-\frac{1}{3}(\lambda-2)^3(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2))$$

$$=\lim_{\lambda\to 2^+}\frac{1}{9}-\frac{1}{3}(\lambda-2)^2\left[\frac{1}{3}(\lambda-2)-(\lambda-2)\ln(\lambda-2)\right]$$

On pose t = λ – 2 si $\lambda \to 2^+$ alors $\mathbf{t} \to 0^+$ Donc $\lim\limits_{\lambda \to 2^+} (\lambda - 2)\ln(\lambda - 2) = \lim\limits_{\mathbf{t} \to 0^+} \mathbf{t}\ln(\mathbf{t}) = 0$

$\lim\limits_{\lambda \to 2^+} \frac{1}{3}(\lambda - 2)^2\left[\frac{1}{3}(\lambda - 2) - (\lambda - 2)\ln(\lambda - 2)\right] = 0$

D'où $\lim\limits_{\lambda \to 2^+} \mathbf{A}(\lambda) = \frac{1}{9}\mathbf{cm}^2$