Benmoussa Mohammed

Exercice N° 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. on considère les points $A(1,-1,-1)$ et $B(0,-2,1)$ et $C(1,-2,0)$.

1. ..

a. Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ . ... (0,75)

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\-2+1\\1+1\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-1\\-2+1\\0+1\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

D'où :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1\\2&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&0\\2&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{k}=(-1+2)\vec{i}-(-1+0)\vec{j}+(1+0)\vec{k} .$$

Conclusion : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

b. En déduire que $x+y+z+1=0$ est l'équation cartésienne du plan (ABC) . ... (0,5)

1ère méthode :

- On a le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ou encore $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,1,1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
- D'où :

$$M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z+1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow 1\times(x-1)+1\times(y+1)+1\times(z+1)=0$$
$$\Leftrightarrow x-1+y+1+z+1=0$$
$$\Leftrightarrow x+y+z+1=0$$

Conclusion : $x+y+z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

2ième méthode :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,1,1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc équation du plan (ABC) est de la forme : $x+y+z+d=0$.
- Le point $A(1,-1,-1)$ appartienne au plan (ABC) donc : $1\times1+1\times(-1)+1\times(-1)+d=0$ d'où $d=1$.

Conclusion : $x+y+z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

2. on considère la sphère (S) d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$.

on vérifie que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(2,-1,1)$ et pour rayon $R=\sqrt{5}$ . ... (0,75)

on a : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}-4+\underbrace{y^2+2y+1}_{(y+1)^2}-1+\underbrace{z^2-2z+1}_{(z-1)^2}-1+1=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y+1)^2-1+(z-1)^2-1+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5=\sqrt{5}^2$$

La dernière écriture représente l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(2,-1,1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

Conclusion : la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(2,-1,1)$ et pour rayon $R=\sqrt{5}$.

3. ..

a. Calculer $d(\Omega,(ABC))$ . ... (0,5)

On a : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2-1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$. (on remplace $x+y+z+1$ (sans écrire $=0$) par les coordonnées de $\Omega(2,-1,1)$)

Conclusion : $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{3}$

b. En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) . ...(0,5)

Puisque le rayon du cercle est $R=\sqrt{5}$ et on a ; $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{3}<\sqrt{5}$ d'où l'intersection du plan (ABC) et la sphère (S) sera un cercle (Γ) .

Conclusion : le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) .

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2-2z+4=0$ . ... (0,75)

On calcule :le discriminant Δ :

On a : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=4-16=-12<0$.

D'où l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{2+i\sqrt{-\Delta}}{2\times1}=\frac{2+i\sqrt{12}}{2}=\frac{2+i2\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3} \text{ et } z_2=\overline{z_1}=1-i\sqrt{3}$$

Conclusion : ensemble des solutions de l'équation est : $S=\{1+i\sqrt{3}\ ;\ 1-i\sqrt{3}\}$

2. Dans le plan complexe (P) étant rapporté à un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$, On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives $a=1-i\sqrt{3}$, $b=2+2i$, , $c=\sqrt{3}+i$ et $d=-2+2\sqrt{3}$.

a. Vérifier que : $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$ . ... (0,5)

On a :

- $c-d=\sqrt{3}+i-\left(-2+2\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}+2+i$.
- $a-d=1-i\sqrt{3}-\left(-2+2\sqrt{3}\right)=3-2\sqrt{3}-i\sqrt{3}=-\sqrt{3}\left(\underbrace{-\sqrt{3}+2+i}_{c-d}\right)=-\sqrt{3}\left(c-d\right)$
- donc $a-d=-\sqrt{3}\left(c-d\right)$

Conclusion : $a-d=-\sqrt{3}\left(c-d\right)$

b. En déduire que : les points points A , C et D sont alignés . ……………………………………….. (0,25)
On a :

- Le vecteur $\overrightarrow{DA}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{DA}}=a-d$.
- Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{DC}}=c-d$

$$\begin{aligned}a-d=-\sqrt{3}\left(c-d\right)&\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{DA}}=-\sqrt{3}z_{\overrightarrow{DC}}\\&\Leftrightarrow \overrightarrow{DA}=-\sqrt{3}\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

Par suite les deux vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires donc les points A et C et D sont alignés .
Conclusion : les points A et C et D sont alignés .

3. Soit z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M' ; l'image de M par la rotation R de centre le point O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Vérifier que : $z'=\frac{1}{2}az$. ………………………………………………………………………… (0,5)

L'écriture complexe de la rotation R est de la forme : $z'-\omega=\left(z-\omega\right)e^{i\theta}$ avec ω est l'affixe du centre de la rotation et θ est l'angle de la rotation .

D'où : $z'-0=\left(z-0\right)e^{i\frac{-\pi}{3}}$

(avec $\omega=0$ est l'affixe du point O centre de la rotation et $\theta=\frac{-\pi}{3}$ est l'angle de la rotation R) .

$$\begin{aligned}z'&=z\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)\\&=z\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\&=z\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=z\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\\&=\frac{1}{2}az \qquad ;\left(\text{car : }1-i\sqrt{3}=a\right)\end{aligned}$$

D'où : L'écriture complexe de la rotation R est $z'=\frac{1}{2}az$

Conclusion : $z'=\frac{1}{2}az$

4. Soit le point H d'affixe h est l'image du point B par la rotation R , et le point P d'affixe p tel que $p = a - c$.

a. Vérifier que : $h = ip$ . ... (0,5)

On a :

$$\begin{aligned} R(B) = H &\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}ab \\ &\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)(2 + 2i) \\ &\Leftrightarrow h = \left(1 - i\sqrt{3}\right)(1 + i) \\ &\Leftrightarrow h = \left(1 - i\sqrt{3}\right) + i\left(1 - i\sqrt{3}\right) \\ &\Leftrightarrow h = i\underbrace{\left(-i - \sqrt{3}\right)}_{-c} + i\underbrace{\left(1 - i\sqrt{3}\right)}_{a} \\ &\Leftrightarrow h = i(a - c) \\ &\Leftrightarrow h = ip \end{aligned}$$

D'où : $h = ip$

Conclusion : $h = ip$

b. Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O . ... (0,5)

On a :

$$\frac{h-0}{p-0} = \frac{ip}{p} = i \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|h-0|}{|p-0|} = |i| \\ \overline{\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}\right)} \equiv \arg\left(\dfrac{h-0}{p-0}\right) \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{OH}{OP} = 1 \\ \overline{\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}\right)} \equiv \arg(i) \ [2\pi] \ ; \left(\dfrac{h}{p} = i\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OH = OP \\ \overline{\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$$

Donc on a :

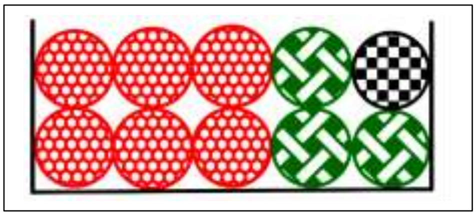
- $OH = OP$ d'où le triangle OHP est isocèle en O .
- $\overline{\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$ d'où le triangle OHP est rectangle en O .

Conclusion : le triangle OHP est rectangle et isocèle en O .

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher:

- Trois boules vertes .

- Six boules rouges .
- Une boule noire .



On considère l'expérience suivante : On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne . Soient les événements suivants :

- A « les trois boules tirées sont vertes » .
- B « les trois boules tirées sont de même couleur » .
- C « au moins deux boules de même couleur »

1. Montrer que : $p(A)=\dfrac{1}{120}$ et $p(B)=\dfrac{7}{40}$. ……………………………………………………(2)

- Montrons que : $p(A)=\dfrac{1}{120}$
  - On calcule $card\Omega$: (ou encore le nombre des tirages possibles).
    Tirer simultanément 3 boules parmi 10 boules présente une combinaison de 3 parmi 10 ,.
    d'où le nombre des tirages possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 10 ce nombre est :
    $$card\Omega = C_{10}^{3} = \frac{10\times9\times8}{1\times2\times3} = 120 .$$
    donc : $\boxed{card\Omega = C_{10}^{3} = 120}$.
  - On calcule $cardA$: (le nombre des tirages qui réalisent l'événement A) .
    l'événement A « les 3 boules tirées sont vertes »
    Tirées 3 boules vertes simultanément parmi 3 boules vertes de l'urne ceci présente une combinaison de 3 parmi 3 .
    Donc le nombre des tirages qui réalisent l'événement A est $C_3^3 = \dfrac{3\times2\times1}{1\times2\times3} = 1$ (Remarque $C_n^n = 1$)
    donc : $\boxed{cardA = C_3^3 = 1}$.
    Conclusion : $\boxed{p(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega} = \dfrac{C_3^3}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{120}}$.
- Montrons que : $p(B)=\dfrac{7}{40}$.
  - On calcule $cardB$: (le nombre des tirages qui réalisent l'événement B) .
    l'événement B « les 3 boules tirées sont de même couleur »
    ou encore l'événement B est B « les 3 boules tirées sont vertes ou les boules sont rouges » .
    - les 3 boules tirées simultanément sont vertes parmi 3 boules vertes de l'urne on a : $cardA = C_3^3 = 1$
    - les 3 boules tirées simultanément sont rouges parmi 6 boules rouges de l'urne on a :
      $$C_6^3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20.$$
    - D'où : $\boxed{cardB = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21}$

    donc : $p(B) = \dfrac{cardB}{card\Omega} = \dfrac{C_3^3 + C_6^3}{C_{10}^3} = \dfrac{21}{120} = \dfrac{7\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times40} = \dfrac{7}{40}$.

    Conclusion : $\boxed{p(B) = \dfrac{7}{40}}$

D'où : $p(A)=\frac{1}{120}$ et $p(B)=\frac{7}{40}$

2. Calculer $p(C)$ . ...(1)

➢ On calcule $cardC$: (le nombre des tirages qui réalisent l'événement C) .

1ère méthode :

C « au moins deux boules de même couleur »
ou encore C « exactement deux boules de même couleur ou exactement trois boules de même couleur »

L'événement contraire de l'événement C est l'événement $\overline{C}$

$\overline{C}$ « les trois boules de couleurs différentes »

Donc : $card\overline{C}=C_3^1\times C_6^1\times C_1^1=3\times 6\times 1=18$.

Par suite $cardC=card\Omega-card\overline{C}=120-18=102$.

Donc : $p(C)=\frac{cardC}{card\Omega}=\frac{card\Omega-card\overline{C}}{C_{10}^3}=\frac{120-18}{120}=\frac{102}{120}=\frac{\cancel{6}\times 17}{\cancel{6}\times 20}=\frac{17}{20}$

Conclusion : $p(C)=\frac{17}{20}$

2ième méthode :

ou encore :

C « exactement deux boules de même couleur ou exactement trois boules de même couleur »

- On obtient exactement trois boules de même couleur donc l'événement B d'où :
  $cardB=C_3^3+C_6^3=1+20=21$
- On obtient exactement deux boules de même couleur ou encore « (deux boules vertes et une boule parmi les deux autres couleurs) ou (deux boules rouges et une boule parmi les deux autres couleurs) »
  - ✓ Tirer deux boules vertes et une boule parmi les deux autres couleur (on a 7 boules) le nombre des tirages est : $C_3^2\times C_7^1$.
  - ✓ Tirer deux boules rouges et une boule parmi les deux autres couleurs (on a 4 boules) le nombre des tirages est : $C_6^2\times C_4^1$.
  - ✓ D'où : le nombre des tirages tel que : On obtient exactement deux boules de même couleur est : $C_3^2\times C_7^1+C_6^2\times C_4^1=3\times 7+15\times 4=81$
- Donc : $cardC=C_3^3+C_6^3+C_3^2\times C_7^1+C_6^2\times C_4^1=1+20+3\times 7+15\times 4=102$.
  Par suite on obtient que :
  $$p(C)=\frac{cardC}{card\Omega}=\frac{C_3^3+C_6^3+C_3^2\times C_7^1+C_6^2\times C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1+20+3\times 7+15\times 4}{120}=\frac{102}{120}=\frac{\cancel{6}\times 17}{\cancel{6}\times 20}=\frac{17}{20}$$

  Conclusion : $p(C)=\frac{17}{20}$

Problème

Première Partie :

Soit la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. .Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement . ... (0,5)

- On calcule : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

  On a :

  - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
  - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\ln x=+\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^2=+\infty \end{cases}$
  - D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2=+\infty$.

  Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty}$.

- On interprète le résultat géométriquement :

  Puisque on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ donc la courbe (C) admet une asymptote verticale ou encore c'est la droite d'équation $x=0$ ou encore l'axe des ordonnées .

2. ..

a. Vérifier que :pour tout x de $]0,+\infty[$: $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$. .... (0,25)

On a :

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x &= x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln x\times\ln x-\ln x \\ &= x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\ln x)^2-\ln x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout x de $]0,+\infty[$: $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$.

b. En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ . ... (0,5)

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x=+\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x\right)=+\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c. Montrer que : pour tout x de $]0,+\infty[$: $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ puis en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$ . ... (0,5)

- Montrons que : $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{(\ln x)^2}{x} &= \frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \\
&= \frac{\left(2\ln\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \quad ; \quad \left(\ln x^r = r\ln x \ ; \ r\in\mathbb{Q}\right) \\
&= \frac{4\left(\ln\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \\
&= 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2
\end{aligned}$$

Conclusion : $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

- En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 \\
&= \lim_{t\to+\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 \quad ; \quad \left(t=\sqrt{x} \ ; \ x\to+\infty \ ; \ t\to+\infty\right) \\
&= 0 \quad ; \quad \left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

d. Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$. .... (0,75)

On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{2x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x} = 1$.

$\left(\text{car } \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{2x} = 1 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \text{ d'après la question précédente}\right)$

D'où : $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \cancel{x}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x - \cancel{x} = +\infty$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$)

donc $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = +\infty$

- Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = +\infty$.

Conclusion : (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$.

3. ..

a. Montrer que : pour tout x de $]0,1]$: $(x-1)+\ln x \le 0$

et que pour tout x de $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x \ge 0$. .... (0,5)

- ..Montrons que : pour tout x de $]0,1]$: $(x-1)+\ln x \le 0$.

On a : $0 < x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 < x-1 \le 0 \\ \ln x \le 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x-1)+\ln x \le 0$ (car la somme de deux nombres négatifs est un nombre négatif)

Donc : pour tout x de $]0,1]$: $(x-1)+\ln x \le 0$

- .. Montrons pour tout x de $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x \ge 0$.

On a : $x \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ \ln x \ge 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x-1)+\ln x \le 0$ (car la somme de deux nombres positifs est un nombre positif)

Donc : pour tout x de $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x \ge 0$.

Conclusion : $\begin{cases} \text{pour tout x de }]0,1] : (x-1)+\ln x \le 0 \\ \text{pour tout x de } [1,+\infty[: (x-1)+\ln x \ge 0 \end{cases}$

Remarque : on peut utiliser le tableau des signes de $x-1$ et $\ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

b. Montrer que : pour tout x de $]0,+\infty[$: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$. .... (1)

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)' \\ &= 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\times 2(\ln x)'\ln x \\ &= 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\times\ln x \\ &= \frac{x-1+\ln x}{x} \end{aligned}$$

Conclusion : **pour tout x de $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{x-1+\ln x}{x}$.**

<u>c.</u> **Dresser le tableau de variations de la fonction f .** ……………………………………………… (0,5)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. ..

<u>a.</u> **Montrer que : $f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0,+\infty[$.** ……………………………………… (0,5)

On a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' \\ &= \left(\frac{x-1+\ln x}{x}\right)' \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\times x-(x-1+\ln x)\times 1}{x^2} \\ &= \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1-\ln x}{x^2} \\ &= \frac{2-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Conclusion : **pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$.**

<u>b.</u> **En déduire que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées .** ……. (0,5)

- **Pour déterminer les points d'inflexions d'une fonction on étudie le signe de la fonction f '' dérivée seconde de f .**

- Le signe de $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ est le signe de $2-\ln x$ car $x^2>0$ avec $x\in]0,+\infty[$.
- On a : $2-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 2$
$\Leftrightarrow x\leq e^2$

D'où le signe de f'' est donné par le tableau suivant :

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	

- **Conséquence :** la fonction f'' dérivée seconde de f s'annule en $x_0=e^2$ et change de signe au voisinage de $x_0=e^2$.

Conclusion : le point $I\left(e^2,f\left(e^2\right)\right)=I\left(e^2,\frac{2e^2+1}{2}\right)$ est un point d'inflexion à la courbe (C) de f.

5. ..

a. Montrer que : pour tout x de $]0,+\infty[$: $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ et déduire la position relative de (C_f) et (Δ) . ... (0,5)

- Montrons que : pour tout x de $]0,+\infty[$: $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$.

On a :
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\ln x-1)^2&=\frac{1}{2}\left((\ln x)^2-2\ln x+1\right)\\&=\frac{1}{2}(\ln x)^2-\ln x+\frac{1}{2}\\&=\underbrace{\frac{1}{2}(\ln x)^2-\ln x+\frac{1}{2}+x}_{f(x)}-x\\&=f(x)-x\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout x de $]0,+\infty[$: $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$.

- En déduire la position relative de (C_f) et (Δ) .

Pour cela on étudier le signe de : $f(x)-x$ ou encore $\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ qui a un signe positif sur $]0,+\infty[$ mais s'annule si $\ln x-1=0\Leftrightarrow \ln x=1$
$\Leftrightarrow e=1$

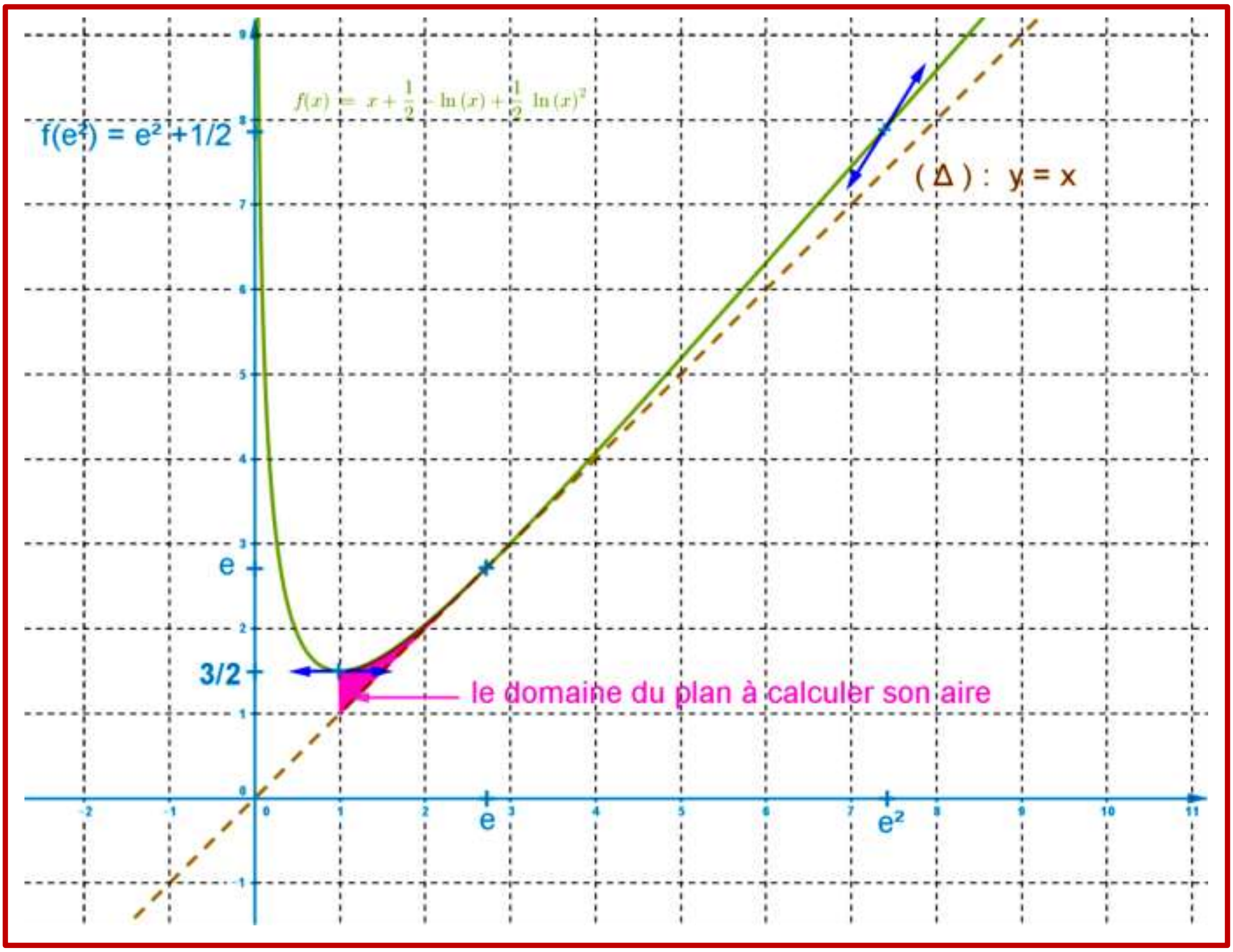
Conclusion :

- La courbe (C) de f est située au dessus de la droite (Δ) sur chacune des intervalles $]0,e[$ et $]e,+\infty[$
- La courbe (C) de f coupe la droite (Δ) au point $A(e,f(e))=A(e,e)$.

- **Remarque : on peut résumer la position relative de (C_f) et (Δ) par le tableau suivant :**

x	0		e		$+\infty$
$f(x)-x$ et $(\ln x-1)^2$	‖	+	0	+	
position relative de (C_f) et (Δ)	‖	(C) est au dessus de (Δ)	↓ (C) et (Δ) se coupent au point d' abscisse $x=e$	(C) est au dessus de (Δ)	

b. **Construire (Δ) et (C_f) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.** .... **(1)**



6. ..

a. **Montrer que : $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0,+\infty[$.** **(0,5)**

Pour cela on montre que : $H'(x)=h(x)$.

On a : $H'(x)=(x\ln x-x)'$

$$= (x)' \ln x + (x)(\ln x)' - (x)'$$
$$= 1 \times \ln x + \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} - 1$$
$$= \ln x + \cancel{1} - \cancel{1}$$
$$= \ln x = h(x)$$

D'où : $H'(x) = h(x)$.

Conclusion : la fonction $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0,+\infty[$.

b. A l'aide d'une intégration par parties , montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ . ... (0,75)

On écrit : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = \int_1^e (\ln x) \times (\ln x) dx$

On utilise la disposition suivante :

$$u(x) = \ln x \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$$
$$(1)\downarrow \qquad (2)\searrow \quad - \quad \downarrow(3)$$
$$v'(x) = \ln x \qquad v(x) = x\ln x - x$$

Par suite on obtient:

$$\overbrace{\int_1^e (\ln x)^2 dx}^{(1)} = \overbrace{\left[\ln x \times (x\ln x - x)\right]_1^e}^{(2)} - \overbrace{\int_1^e \frac{1}{x} \times (x\ln x - x) dx}^{(3)}$$
$$= \left(\ln e \times (e\ln e - e)\right) - \left(\ln 1 \times (1\ln 1 - 1)\right) - \int_1^e (\ln x - 1) dx$$
$$= \left(1(e \times 1 - e) - 0\right) - \int_1^e \ln x dx + \int_1^e 1 dx$$
$$= 0 - [x\ln x - x]_1^e + [x]_1^e \quad ; \quad (H'(x) = h(x))$$
$$= -\left((e \times 1 - e) - (1 \times 0 - 1)\right) + (e - 1)$$
$$= 0 - 1 + e - 1$$
$$= e - 2$$

Conclusion : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f) et (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. .... (0,5)

La surface demandée à calculer en cm^2 est :

$$\left(\int_1^e |f(x) - x| dx\right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = \left(\int_1^e (f(x) - x) dx\right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \ cm^2$$ (car (C) est au dessus de (Δ) sur $[1,e]$)

$$= \left(\int_1^e \left(\cancel{x} + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \cancel{x}\right) dx\right) \times 1 \times 1 \ cm^2$$
$$= \int_1^e \frac{1}{2} dx - \int_1^e \ln x dx + \frac{1}{2} \underbrace{\int_1^e (\ln x)^2 dx}_{e-2} \quad cm^2$$

$$=\frac{1}{2}[x]_1^e-[x\ln x-x]_1^e+\frac{1}{2}(e-2) \quad cm^2$$

$$=\frac{1}{2}(e-1)-\underbrace{((e\times 1-e)-(1\times 0-1))}_{-1}+\frac{1}{2}(e-2) \quad cm^2$$

$$=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}-1+\frac{e}{2}-1 \;=e-\frac{5}{2} \quad cm^2$$

Conclusion : la surface demandée est $\frac{2e-5}{2}$ cm^2.

Deuxième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. ..

a. Montrer par récurrence que : $1\le u_n\le e$ pour tout n de $\mathbb{N}$ . ... (0,5)

On note la relation : $1\le u_n\le e$ par (1)

- On vérifie que la relation (1) est vraie pour $n=0$.

  on a : $1\le u_0=1\le e$ d'où la relation (1) est vraie pour $n=0$.

- On suppose que la relation (1) est vraie pour n . ou encore $1\le u_n\le e$ est vraie (hypothèse de récurrence) .

- On montre que : la relation (1) est vraie pour $n+1$. (ou encore à démontrer que $1\le u_{n+1}\le e$

  d'après hypothèse de récurrence on a : $1\le u_n\le e$ ou encore $u_n\in[1,e]$

  Donc : $1\le u_n\le e\Rightarrow f(1)\le f(u_n)\le f(e)$ (car la fonction est croissante sur $[1,e]$ et $u_n\in[1,e]$) .

  $\Rightarrow \frac{3}{2}\le u_{n+1}\le e$ $\qquad$ ($f(e)=e$ puisque (C) coupe (Δ) au point $A(e,f(e))=A(e,e)$

  $\Rightarrow 1\le\frac{3}{2}\le u_{n+1}\le e$ $\qquad$ et $f(1)=\frac{3}{2}$ voir tableau de variations de f)

  D'où : la relation (1) est vraie pour $n+1$.

  Conclusion : $1\le u_n\le e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante . ... (0,5)

Pour cela on montre que : $u_{n+1}\ge u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou encore $u_{n+1}-u_n\ge 0$)

Soit n de $\mathbb{N}$, on pose $x=u_n$ et on a $u_n\in[1,e]$ car $1\le u_n\le e$

D'après le résultat de la question I) 5) a -) on a (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $[1,e]$

En déduire que : $f(x)\ge x$ pour tout x de $[1,e]$.

D'où : $x\in[1,e]\Rightarrow f(x)\ge x$

$\Rightarrow f(u_n)\ge u_n$ $\quad$; $(u_n=x$ et $1\le u_n\le e)$

$\Rightarrow u_{n+1}\ge u_n$ $\quad$; $(\;u_{n+1}=f(u_n)\;)$

$\Rightarrow u_{n+1}-u_n\ge 0$

$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$

Donc : $u_{n+1} \geq u_n$

Conclusion : la suite (u_n) est croissante .

Remarque : on peut utiliser une démonstration par récurrence (on montre que pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_{n+1} \geq u_n$).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente . ... (0,5)

On a :

- la suite (u_n) est croissante .
- la suite (u_n) est majorée (puisque $1 \leq u_n \leq e$) .
- d'après une propriété la suite (u_n) est convergente .(tel que sa limite sera notée par ℓ avec $\ell \in \mathbb{R}$) .

Conclusion : la suite (u_n) est convergente .

2. Calculer la limite de la suite (u_n) . ... (0,75)

- la suite (u_n) est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.
- la fonction f est continue sur $I = [1,e]$ et $f(I) \subset I$

  (car $f(I) = [f(1), f(e)] = \left[\frac{3}{2}, e\right] \subset I = [1,e]$ (car f est continue et croissante sur $I = [1,e]$ et $f(e) = e$ et $f(1) = \frac{3}{2}$)).
- On a : $u_0 = 1 \in [1,e]$.
- la suite (u_n) est convergente vers ℓ avec $\ell \in \mathbb{R}$.

  donc ℓ est solution de l'équation : $x \in I = [1,e]$; $f(x) = x$ (d'après une propriété)

  pour résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1,e]$ on étudier l'intersection de la courbe (C) et la droite (Δ) sur $[1,e]$.

  d'après ce qui a précédé (C) coupe (Δ) au point $A(e, f(e)) = A(e,e)$

  d'où la solution de l'équation précédente est : $x = e \in [1,e]$ donc $\ell = e$

  Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$