Année scolaire : 2022 – 2023	Examen national 2015 session normale annulée	AGOUZAL 2 BPCF

Exercice 1 : (2015 Session annulée) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ les points A(2; 1; 0), B(-4 ; 1 ; 0) et soit (P) le plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

1) Montrer que : x + y – z – 3 = 0 est une équation cartésienne du plan (P).

2) Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

Montrer que (S) est une sphère de centre Ω(-1 ; 1 ; 0) et son rayon R = 3

3) a) Calculer la distance du point Ω au plan (P) puis déduire que (P) coupe (S) suivant un cercle (C).

b) Montrer que le centre du cercle (C) est H(0 ; 2 ; -1).

4) Montrer que : $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$ puis calculer la surface du triangle OHB.

Exercice 2 : (2015 Session annulée) (3pts)

I - On considère le nombre complexe u tel que :

$\mathbf{a}=2+\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}$

1) Montrer que le module du nombre complexe **a** est $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

2) Vérifier que : $\mathbf{a}=2(1+\cos\frac{\pi}{4})+2\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}$

3) a) En linéarisant $\cos^2\theta$, θ est un nombre réel montrer que : $1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$

b) Montrer que $\mathbf{a}=4\cos\frac{\pi}{8}(\cos\frac{\pi}{8}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{8})$ est une forme trigonométrique du nombre **a** montrer que

$\mathbf{a}=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4\mathbf{i}$

II - On considère, Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ on considère les deux points Ω et A d'affixes respectives ω et a tels que :

$\omega=\sqrt{2}$; $\mathbf{a}=2+\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que l'affixe b du point B image du point A par la rotation R est **2i**.

2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tel que : $|\mathbf{z}-2\mathbf{i}|=2$

Exercice 3 : (2015 Session annulée) (3pts)

Une caisse U_1 contient 7 boules : quatre boules rouges et trois boules vertes (indiscernables au toucher).

Une caisse U_2 contient 5 boules : trois boules rouges et deux boules vertes (indiscernables au toucher).

I) On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et en même temps 3 boules de U_1 .

Soit l'événements A" Obtenir une boule rouge et deux boules vertes" et l'événement B " Obtenir trois de la même couleur "

Montrer que $\mathbf{P(A)}=\frac{12}{35}$ et $\mathbf{P(B)}=\frac{1}{7}$

II) On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et en même temps 2 boules de U_1 , puis on tire au hasard une boules de U_2.

Soit C l'événement : " Obtenir trois boules rouges"

Montrer que $\mathbf{P(C)}=\frac{6}{35}$

Problème : (2015 Session annulée) (8pts)

On considère la fonction f définie par :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\frac{1}{x(1-\ln\mathbf{x})}$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm)

I) 1)Montrer que : $\mathbf{D_f}=\left]0;\mathbf{e}\right[\cup\left]\mathbf{e};+\infty\right[$

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to e^+}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ et $\lim\limits_{x\to e^-}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ puis interpréter les résultats géométriquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ puis en déduire que (C_f) admet une asymptote au voisinage de +∞ dont on précisera une équation

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathbf{f}(\mathbf{x})=+\infty$ puis interpréter les résultats géométriquement(pour calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathbf{f}(\mathbf{x})$

(remarquer que **x(1 – lnx) = x – xlnx)**

3) a - Montrer que: $\mathbf{f}'(\mathbf{x})=\frac{\ln\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2(1-\ln\mathbf{x})^2}$ $\forall\mathbf{x}\in\mathbf{D_f}$

b) Montrer que f est décroissante sur $\left]0,1\right]$ et croissante sur chacun des intervalles $\left[1;\mathbf{e}\right[$ et $\left]\mathbf{e};+\infty\right[$

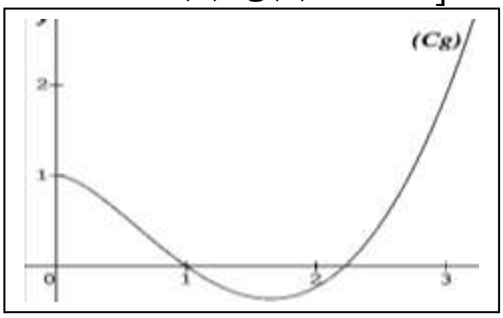
b - Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbf{D_f}$

II) Soit g la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})=1-\mathbf{x}^2(1-\ln\mathbf{x})$$

(C_g) est la courbe représentative de g dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (voir figure)

1) a) Déterminer graphiquement de solution de l'équation suivante $(E):\mathbf{g}(\mathbf{x})=0;x\in\left]0;+\infty\right[$



b) On donne le tableau des valeurs suivantes :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
g(x)	– 0,14	– 0,02	0,12	0,28

Montrer que l'équation (E) admet une solution α telle que $2,2 < \alpha < 2,3$

2) a) Vérifier que : $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)} \quad \forall x \in D_f$

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation y = x coupe la courbe (C_f) en deux points d'abscisses 1 et α

c) Déterminer à partir de (C_g) le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1;\alpha]$ et montrer que $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de $[1;\alpha]$

3) Tracer dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (Δ) et la courbe (C_f).

4) a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \ln 2$ (remarquer que $\dfrac{1}{x(1-\ln x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{(1-\ln x)} \quad \forall x \in D_f$

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par (C_f) la droite (Δ) et les droites d'équations x = 1 et $x = \sqrt{e}$

III) On considère la suite (U_n) définie par :

$U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $U_0 = 2$

1) Montrer que : $1 \leq U_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question II) 2) c))

3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.