

Exercice 1 : (2014 SN) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct

$(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(0;3;1)$, $B(-1;3;0)$ et $C(0;5;0)$ et

(S) la sphère d'équation: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0$

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ et en déduire que A, B et C sont non alignés.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

b) Montrer que : $2x - y - 2z + 5 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } (ABC)$$

$$(ABC) : 2x - y - 2z + d = 0$$

$$\text{Or } A(0;3;1) \in (ABC)$$

$$\text{Donc } 2 \times 0 - 3 - 2 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 5$$

$$\text{D'où } (ABC) : 2x - y - 2z + 5 = 0$$

2) a) Montrer que (S) est de centre $\Omega(2; 0; 0)$ et de rayon 3

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0$$

$$a = \frac{-4}{-2} ; b = \frac{0}{-2} ; c = \frac{0}{-2} ; d = -5$$

$$\text{Donc } a = 2 ; b = 0 ; c = 0 ; d = -5$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 5 = 9 > 0$$

$$\text{Donc le centre de (S) est } \Omega(2; 0; 0) \text{ et } R = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{D'où } \Omega(2; 0; 0) \text{ et rayon } R = 3$$

b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

$$(ABC) : 2x - y - 2z + 5 = 0 \quad \Omega(2; 0; 0)$$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$$

$$\text{On a } d(\Omega, (ABC)) = 3 \text{ et } R = 3$$

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

c) Déterminer le triplet de coordonnées du point de tangence H du plan (ABC) et de la sphère (S).

H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC)

Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2; -1; -2)$ est un vecteur normal au plan

(ABC) donc c'est un vecteur directeur de (Δ)

Soit $M(x; y; z) \in (\Delta) \quad \Omega(2; 0; 0)$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ est une représentation}$$

paramétrique de la droite (Δ) .

$M(x; y; z) \in (\Delta) \cap (ABC)$ équivaut à

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -2t \\ 2x - y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

$$2(2 + 2t) - (-t) - 2(-2t) + 5 = 0$$

$$\text{Donc } 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow 9t = -9 \Leftrightarrow t = -1$$

$$\begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{donc } (\Delta) \cap (ABC) = \{H(0; 1; 2)\}$$

D'où $H(0; 1; 2)$ est le point de contact de (S) et (ABC).

Exercice 2 : (2014 SN) (3pts)

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$

$$\Delta = \sqrt{2}^2 - 4 \times 1 \times 2 = -6$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{D'où } S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \right\}$$

2) Soit le nombre complexe u tel que :

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

a) Ecrire u sous forme trigonométrique.

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$|u| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} |1 + i\sqrt{3}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3+1} = \sqrt{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$u = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

b) En déduire que u^6 est un réel.

$$u^6 = (\sqrt{2})^6 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^6$$

$$u^6 = 8 \left(\cos \frac{6\pi}{3} + i \sin \frac{6\pi}{3} \right)$$

$$u^6 = 8(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 8(1 + i \times 0)$$

D'où $u^6 = 8$

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes

respectives $a = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $b = 8$

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Ecrire z' en fonction de z

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R.

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_O)$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

$$\text{D'où } z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

b) Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R.

$$R(A) = B \Leftrightarrow b = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) a ?$$

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) a = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (4 - 4i\sqrt{3})$$

$$= 2 - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} + 6 = 8 = b$$

D'où $R(A) = B$

c) En déduire que le triangle OAB est équilatéral

$$R(A) = B \text{ donc } OA = OB \text{ et } (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

D'où le triangle OAB est équilatéral.

Exercice 3 : (2014 SN) (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 7 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 13$$

1) Montrer que : $U_n < 14 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 13$ donc $U_0 < 14$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n < 14$ et montrons que $U_{n+1} < 14$

On a $U_n < 14$ donc

$$\frac{1}{2} U_n < \frac{1}{2} 14 \Leftrightarrow \frac{1}{2} U_n + 7 < 7 + 7 \Leftrightarrow U_{n+1} < 14$$

D'où $U_n < 14 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Soit (V_n) la suite définie par :

$$V_n = 14 - U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donner V_n en fonction de n .

Montrons que $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$V_{n+1} = 14 - U_{n+1} = 14 - \frac{1}{2} U_n - 7 = 7 - \frac{1}{2} U_n$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} (14 - U_n) = \frac{1}{2} V_n$$

$$\text{D'où } V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$\text{De premier terme } V_0 = 14 - U_0 = 14 - 13 = 1$$

$$\text{Donc } V_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n V_0 = \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\text{D'où } V_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) En déduire que : $U_n = 14 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

puis Calculer $\lim U_n$

$$\text{On a } V_n = 14 - U_n \text{ donc } U_n = 14 - V_n \text{ et } V_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\text{D'où } U_n = 14 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim U_n = \lim \left(14 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) = 14 \quad \text{car} \quad \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$$

$$-1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{D'où } \lim U_n = 14$$

c) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle

$$U_n > 13,99 \Leftrightarrow 14 - \left(\frac{1}{2} \right)^n > 13,99$$

$$\Leftrightarrow 14 - 13,99 > \left(\frac{1}{2} \right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^n < 10^{-2}$$

la fonction log est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^n < 10^{-2} \Leftrightarrow \log \left(\frac{1}{2} \right)^n < \log 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow n \log \frac{1}{2} < -2 \log 10$$

$$\Leftrightarrow -n \log 2 < -2 \Leftrightarrow n > \frac{2}{\log 2}$$

$$\text{Donc } U_n > 13,99 \Leftrightarrow n > \frac{2}{\log 2}$$

$$\frac{2}{\log 2} \approx 6,643 \quad \text{d'où } n = 7$$

Exercice 4 : (2014 SN) (3pts)

1) On tire simultanément et au hasard deux jetons du sac Soit l'événement : A " la somme des deux numéros portés par les deux jetons tirées est égal à 1 "

Montrer que $P(A) = \frac{5}{9}$

$$5(0); 4(1)$$

$$\text{Card}(\Omega) = C_9^2 = 36$$

$$0 + 1 = 1$$

$$\text{Card}(A) = C_5^1 \times C_4^1 = 20$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

2) a) Montrer que la probabilité de gain de Said est $\frac{1}{6}$

Soit B "Obtenir deux jetons portant chacun le chiffre 1"

$$\text{Card}(B) = C_4^2 = 6$$

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b) Quelle est la probabilité pour que Said gagne exactement deux fois.

La probabilité de gain de Said exactement deux fois

$$\text{est : } C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-2} = 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

D'où la probabilité demandée est : $\frac{5}{72}$

Problème : (2014 SN) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$$

1) Montrer que $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0; +\infty[$

et en déduire que g est croissante sur $]0; +\infty[$

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

$$g'(x) = -\frac{-2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

D'où $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0; +\infty[$

On a $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0$

D'où g est croissante sur $]0; +\infty[$

2) Vérifier que $g(1) = 0$ puis en déduire que :

$$g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, 1] \text{ et } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[$$

$$g(1) = 1 - \frac{1}{1^2} + \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$$

Donc $g(1) = 0$

$$\forall x \in]0, 1] \text{ donc } 0 < x \leq 1$$

g est croissante sur $]0; +\infty[$ et $x \leq 1$ donc

$$g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow g(x) \leq 0$$

D'où $\forall x \in]0, 1] \quad g(x) \leq 0$

$\forall x \in [1; +\infty[\quad x \geq 1$ et g est croissante sur $]0; +\infty[$

donc $g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$

D'où $\forall x \in [1; +\infty[\quad g(x) \geq 0$

II) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter le

résultat géométriquement.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x)^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x =$

0 est une asymptote verticale à la courbe (C).

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Car et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln x)^2 = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0$ (on put poser

$$t = \sqrt{x} \text{ puis montrer que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

On a $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$ Si $x \rightarrow +\infty$ donc $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln t^2)^2}{t^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2 \ln t}{t} \right)^2$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} + 2 \frac{\ln t}{t} \right)^2 = 0$$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left((1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} + \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

c) Déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

3) a) Montrer que: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x} \quad \forall x \in]0; +\infty[$
puis en déduire que f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$

$$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

$$f'(x) = 2(1 + \ln x)(1 + \ln x)' - \frac{2x}{x^4}$$

$$f'(x) = 2(1 + \ln x) \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left(1 + \ln x - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{2}{x} g(x)$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{2g(x)}{x} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

$$g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, 1] \text{ et } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, 1] \text{ donc } f \text{ est décroissante sur }]0, 1]$$

$$\text{et } f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[\text{ donc } f \text{ est croissante sur } [1; +\infty[$$

b) Dresser le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$,

puis en déduire que $f(x) \geq 2 \quad \forall x \in]0; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

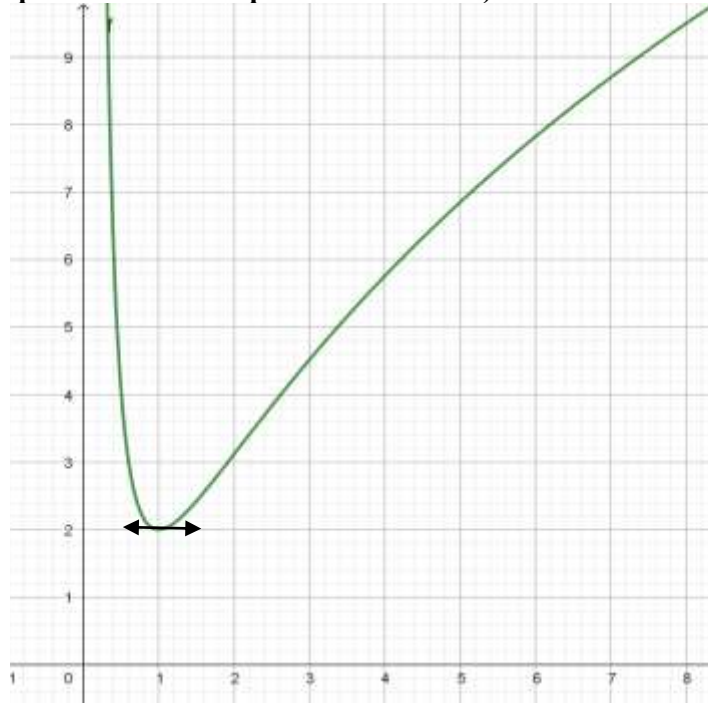
$f(1)$ est le minimum de f sur $]0; +\infty[$

$$\text{Donc } f(x) \geq f(1) \quad \forall x \in]0; +\infty[\text{ or } f(1) = 2$$

$$\text{D'où } f(x) \geq 2 \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

4) Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(On admet que la courbe (C) admet un point d'inflexion, qu'on ne demande pas de déterminer).



5) On considère les intégrales I et J suivantes:

$$I = \int_1^e (1 + \ln x) dx \text{ et } J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$$

a) Montrer que $H: x \rightarrow x \ln x$ est une fonction primitive de $h: x \rightarrow 1 + \ln x$ sur $]0; +\infty[$ puis en déduire que $I = e$.

$$H'(x) = (x \ln x)' = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x = h(x)$$

$$H'(x) = h(x) \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

D'où H est une primitive de h sur $]0; +\infty[$

$$\int_1^e (1 + \ln x) = [x \ln x]_1^e = e \ln e - 1 \ln 1 = e$$

$$\text{D'où } \int_1^e (1 + \ln x) = e$$

b) En utilisant une intégration par parties, montrer

$$J = 2e - 1$$

$$J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$$

$$u(x) = (1 + \ln x)^2 \quad u'(x) = 2(1 + \ln x) \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = 1 \quad v(x) = x$$

$$J = \left[x(1 + \ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e 2x(1 + \ln x) \frac{1}{x} dx$$

$$J = 4e - 1 - 2 \int_1^e (1 + \ln x) dx = 4e - 1 - 2e$$

$$J = 2e - 1$$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

$$A = \int_1^e |f(x)| dx \text{ cm} \times \text{cm}$$

$$A = \left(\int_1^e f(x) dx \right) \text{ cm}^2 \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} dx$$

On a $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ et $x \rightarrow (1 + \ln x)^2$ sont continues sur $]0; +\infty[$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e$$

$$\int_1^e f(x) dx = 2e - 1 - \frac{1}{e} + 1 = \frac{2e^2 - 1}{e}$$

$$\text{D'où } A = \frac{2e^2 - 1}{e} \text{ cm}^2$$