

Exercice 1 : (2012 S1) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ les points A(1;1;-1), B(0;1;-2) et C(3;2;1) et (S) la sphère d'équation: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$

1) Montrer que (S) est de centre $\Omega(1; 0; 1)$ et de rayon $\sqrt{3}$

2) a) Montrer que : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{k}}$ et vérifier que : $\mathbf{x} - \mathbf{z} - 2 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

b) Vérifier que : $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon 1.

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une

représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Montrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection du plan (ABC) et de la droite (Δ) est (2;0;0)

c) En déduire le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 : (2012 S1) (3pts)

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $Z^2 - 12Z + 61 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $\mathbf{a} = 6 - 5\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 4 - 2\mathbf{i}$, $\mathbf{c} = 2 + \mathbf{i}$

a) Calculer $\frac{\mathbf{a} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}}$ et en déduire que A, B et C sont alignés.

On considère la translation T de vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ d'affixe $1 + 5\mathbf{i}$

b) Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est $d = 3 + 6\mathbf{i}$

c) Montrer que $\frac{\mathbf{d} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} = -1 + \mathbf{i}$ et que $\frac{3\pi}{4}$ est un argument de $-1 + \mathbf{i}$

d) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$

Exercice 3 : (2012 S1) (3pts)

Un sac contient huit jetons, indiscernables au toucher : un jeton porte le chiffre 0, cinq jetons portent le chiffre 1 Et deux jetons portent les chiffres 2.

On tire simultanément et au hasard trois jetons du sac. On considère les événements suivants:

1) A " Obtenir trois jetons portant des chiffres différents deux à deux ". Montrer que : $P(A) = \frac{5}{28}$

2) B "la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 5 ". Montrer que : $P(B) = \frac{5}{56}$

3) C "la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 4 " Montrer que : $P(C) = \frac{3}{8}$

Exercice 3 : (2012 S1) (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } U_0 = 11$$

1) Montrer que: $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Montrer que : $U_n < 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que (U_n) est strictement croissante
c) En déduire que (U_n) est convergente.

3) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = U_n - 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$ puis écrire V_n en fonction de n.

b) Montrer que $U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ puis calculer $\lim U_n$

Problème : (2012 S1) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$$

1) a) Montrer que $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont même signe
Sur $]0, 1[$ et en déduire que $\forall x \in]0, 1] \quad g(x) \leq 0$

b) Montrer que $x^2 - 1$ et $x^2 \ln x$ ont même signe
Sur $]1, +\infty[$ et en déduire que $\forall x \in [1, +\infty[\quad g(x) \geq 0$

II) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ (unité : 3 cm)

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et en déduire une interprétation géométrique du résultat.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis en déduire une interprétation géométrique du résultat.

2) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$

Et interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$

b) En déduire que f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$

c) Dresser le tableau des variations de f et montrer que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$

3) Construire la courbe (C_f).

4) a) Montrer que $u : x \rightarrow \frac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow x^2 - 1$ sur \mathbb{R}

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2)$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.