Année scolaire : 2022 – 2023	Solution de l'examen national 2012 SN	AGOUZAL 2 BPCF - 2 BSVTF

Exercice 1 :

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les points A(1;1;-1), B(0;1;-2) et C(3;2;1) et (S) la sphère d'équation: $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

1) Montrer que (S) est de centre Ω(1 ; 0 ;1) et de rayon $\sqrt{3}$

$(S):\ x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0;$

$\mathbf{a}=\frac{-2}{-2}\ ;\ \ \mathbf{b}=\frac{0}{-2};\ \ \mathbf{c}=\frac{-2}{-2};\ \ \mathbf{d}=-1$

Donc $\mathbf{a}=1\ ;\ \mathbf{b}=0;\ \mathbf{c}=1;\ \mathbf{d}=-1$

$\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-\mathbf{d}=1^2+0^2+1^2+1=3>0$

Donc le centre de (S) est $\Omega(1;0;1)$ et $\mathbf{R}=\sqrt{3}$

D'où $\Omega(1;0;1)$ et rayon $\mathbf{R}=\sqrt{3}$

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ et vérifier que : $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

C(3;2;1) ; B(0;1;-2) ; A(1;1;-1)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-1&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&2\\-1&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&2\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\vec{i}-\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$

Soit M(x ;y ;z)∈ (ABC)

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

(ABC) : 1x + 0×y – 1 z + d = 0 or B(0;1;-2) ∈(ABC)

(ABC) : x – z + d = 0 or B(0;1;-2) ∈(ABC)

Donc 0 – (–2) + d = 0 donc d = – 2

D'où $(\mathbf{ABC}):x-z-2=0$

b) Vérifier que : $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=\sqrt{2}$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon 1.

$(\mathbf{ABC}):x-z-2=0\qquad \Omega(1;0;1)$

$$\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=\frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

D'où $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=\sqrt{2}$

On a $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=\sqrt{2}$ et $\mathbf{R}=\sqrt{3}$

Donc $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))<\mathbf{R}$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle (Γ)

De rayon $\sqrt{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}=\sqrt{3-2}=1$

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\end{cases}$ (t ∈ ℝ) est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

On a (Δ) est perpendiculaire au (ABC).

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;0;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc c'est un vecteur directeur de (Δ)

Soit M(x ;y ;z)∈ (ABC) $\qquad \Omega(1;0;1)$

$(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\end{cases}$ (t ∈ ℝ) est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Montrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection du plan (ABC) et de la droite (Δ) est (2;0;0)

$\mathbf{M}(x;y;z)\in(\Delta)\cap(\mathbf{ABC})$ équivaut à

$$\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\\x-z-2=0\end{cases}$$

$(1+t)-(1-t)-2=0$

Donc $1+t-1+t-2=0\Leftrightarrow 2t=2\Leftrightarrow t=1$

$\begin{cases}x=1+1\\y=0\\z=1-1\end{cases}$ d'où $\mathbf{H}(2;0;0)$

$(\Delta)\cap(\mathbf{ABC})=\{\mathbf{H}(2;0;0)\}$

c) En déduire le centre du cercle (Γ)

H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC)

Donc $\mathbf{H}(2;0;0)$ est le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 :

1) Résoudre dans ℂ l'équation : $Z^2-12Z+61=0$

$Z^2-12Z+61=0$

$\Delta=(12)^2-4\times1\times61=144-244=-100$

Don l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{12+i\sqrt{100}}{2}=\frac{12+10i}{2}=6+5i \text{ et } z_2=\overline{z_1}=6-5i$$

D'où $\mathbf{S}=\{6+5i;6-5i\}$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 6 - 5i$, $b = 4 - 2i$, $c = 2 + i$

a) Calculer $\frac{a-c}{b-c}$ et en déduire que A, B et C sont alignés.

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{6-5i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{4-6i}{2-3i}$$

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{2(2-3i)}{2-3i} = 2$$

On a $\frac{a-c}{b-c} = 2$ donc $\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$

D'où A, B et C sont alignés.

On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + 5i$

b) Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est d = 3 + 6i

$$T(C) = D \Leftrightarrow d = c + aff(\vec{u}) \Leftrightarrow d = 2 + i + 1 + 5i$$

D'où $d = 3 + 6i$

c) Montrer que $\frac{d-c}{b-c} = -1 + i$ et que $\frac{3\pi}{4}$ est un argument de $-1 + i$

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{1+5i}{2-3i}$$

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2-15+3i+10i}{2^2+3^2}$$

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{13(-1+i)}{13} = -1+i$$

D'où $\frac{d-c}{b-c} = -1 + i$

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1} = \sqrt{2}$$

$$-1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Donc $\frac{d-c}{b-c} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

D'où $\arg\left(\frac{d-c}{b-c}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

d) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})$

On sait que $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-c}\right)[2\pi]$

D'où $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 3 :

Un sac contient huit jetons, indiscernables au toucher : un jeton porte le chiffre 0, cinq jetons portent le chiffre 1
Et deux jetons portent les chiffres 2.
On tire simultanément et au hasard trois jetons du sac.

1) A ″ Obtenir trois jetons portant des chiffres différents deux à deux ″ Montrer que : $P(A) = \frac{5}{28}$

5 (1) ; 2 (2) ; 1 (0)

$$Card(\Omega) = C_8^3 = 56$$

$$Card(A) = C_5^1 \times C_2^1 \times C_1^1 = 10$$

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

2) B ″la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 5 ″. Montrer que : $P(B) = \frac{5}{56}$

2 + 2 + 1 = 5

$$Card(B) = C_2^2 \times C_5^1 = 5$$

$$P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{5}{56}$$

3) C ″la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 4 ″ Montrer que : $P(C) = \frac{3}{8}$

2 + 2 + 0 = 4 ; 2 + 1 + 1 = 4

$$Card(C) = C_2^2 \times C_1^1 + C_5^2 \times C_2^1 = 21$$

$$P(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

Exercice 4 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 11$$

1) Montrer que: $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10}{11}U_n - \frac{120}{11}$$

Donc $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}U_n - \frac{120}{11}$

D'où $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$

2) a) Montrer que : $U_n < 12$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0 = 11$ donc $U_0 < 12$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n < 12$ et montrons que $U_{n+1} < 12$ c'est-à-dire $U_{n+1} - 12 < 0$

On a

$$U_n < 12 \Leftrightarrow U_n - 12 < 0 \Leftrightarrow \frac{10}{11}(U_n - 12) < 0$$

Or $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$ donc $U_{n+1} - 12 < 0$

D'où $U_n < 12$ $\forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que (U_n) est strictement croissante

$$U_{n+1} - U_n = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} - U_n$$

Donc $U_{n+1} - U_n = \frac{10U_n - 11U_n + 12}{11}$

Donc $U_{n+1} - U_n = \frac{12 - U_n}{11}$ or $U_n < 12$

Donc $12 - U_n > 0$ donc $U_{n+1} - U_n > 0$

D'où (U_n) est strictement croissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente.
On a (U_n) est strictement croissante et majorée donc (U_n) est convergente.

3) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = U_n - 12 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$ puis écrire V_n en fonction de n.

Montrons que $V_{n+1} = \frac{10}{11} V_n$

Donc $V_{n+1} = U_{n+1} - 12$ or $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$

Donc $V_{n+1} = \frac{10}{11}(U_n - 12)$

Donc $V_{n+1} = \frac{10}{11} V_n$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 12 = 11 - 12 = -1$

On a $V_n = V_0 \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où $V_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que $U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ puis calculer $\lim U_n$

On a $V_n = U_n - 12$ donc $U_n = V_n + 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où $U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a $\lim \left(\frac{10}{11}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{10}{11} < 1$

D'où $\lim U_n = 12$

Problème :

I) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$$

1) a) Montrer que $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont même signe Sur $]0,1[$ et en déduire que $\forall x \in]0,1]\quad g(x) \le 0$

$\forall x \in]0,1[\quad 0 < x < 1$ et $\ln x < 0$

$0 < x^2 < 1$ et $\ln x < 0 \qquad x^2 > 0$

Donc $-1 < x^2 - 1 < 0$ et $2x^2 \ln x < 0$

Donc $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont même signe Sur $]0,1[$

On a $x^2 - 1 < 0$ et $2x^2 \ln x < 0 \qquad \forall x \in]0,1[$

Donc $x^2 - 1 + x^2 \ln x < 0 \qquad \forall x \in]0,1[$

D'où $g(x) < 0 \quad \forall x \in]0,1[$

b) Montrer que $x^2 - 1$ et $x^2 \ln x$ ont même signe Sur $]1,+\infty[$ et en déduire que $\forall x \in [1,+\infty[\quad g(x) \ge 0$

$\forall x \in]1,+\infty[\quad x > 1$ donc $x^2 > 1$ donc $x^2 - 1 > 0$

$\forall x \in]1,+\infty[\quad x > 1$ donc $\ln x > \ln 1$ donc $\ln x > 0$

Car ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

Donc $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont même signe Sur $]1,+\infty[$

On a $x^2 - 1 > 0$ et $2x^2 \ln x > 0 \qquad \forall x \in]1,+\infty[$

$\forall x \in]1,+\infty[\quad x^2 - 1 + 2x^2 \ln x > 0$

On a $\forall x \in [1,+\infty[\quad x^2 - 1 \ge 0$ et $2x^2 \ln x \ge 0$

Donc $\forall x \in [1,+\infty[\quad x^2 - 1 + 2x^2 \ln x \ge 0$

D'où $\forall x \in [1,+\infty[\quad g(x) \ge 0$

II) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = (x^2 - 1)\ln x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 3 cm)

1) a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et en déduire une interprétation géométrique du résultat.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - 1)\ln x = +\infty$$

Car $\lim_{x\to 0^+} (x^2 - 1) = -1$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

D'où $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

On a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

b) Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ Montrer que $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis en déduire une interprétation géométrique du résultat

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x^2 - 1)\ln x = +\infty$$

Car $\lim_{x\to +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

D'où $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x^2 - 1)\ln x}{x}$$

Donc $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}\right)\ln x$

Donc $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$

Car $\lim_{x\to +\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

D'où $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2) a) Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x} \quad \forall x\in]0,+\infty[$

Et interpréter géométriquement le résultat $f'(1)=0$

$$f(x)=(x^2-1)\ln x$$

$$f'(x)=2x\ln x+(x^2-1)\frac{1}{x}=\frac{(x^2-1)+2x^2\ln x}{x}$$

D'où $f'(x)=\frac{g(x)}{x} \quad \forall x\in]0,+\infty[$

$$f'(1)=\frac{g(1)}{1}=0$$

$f'(1)=0$ la courbe (C_f) admet une tangente horizontal au point d'abscisse 1

b) En déduire que f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x} \quad \forall x\in]0,+\infty[$$

On a $\forall x\in]0,1]$ $g(x)\leq 0$ donc $f'(x)\leq 0 \quad \forall x\in]0,1]$

Donc f est décroissante sur $]0,1]$

On a $\forall x\in [1,+\infty[$ $g(x)\geq 0$ donc $f'(x)\leq 0 \quad \forall x\in [1,+\infty[$

Donc f est croissante sur $[1,+\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de f et montrer que $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in]0,+\infty[$

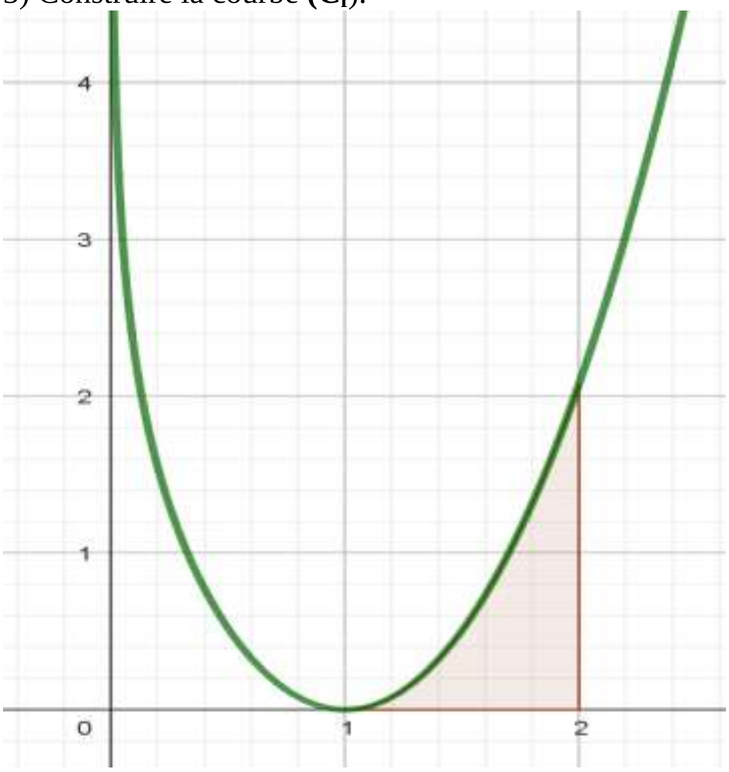
x	0		1		$+\infty$
f′(x)		–	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

On a f(1) = 0 est le minimum de f sur I

Donc $f(x)\geq f(1) \quad \forall x\in]0,+\infty[$

D'où $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in]0,+\infty[$

3) Construire la courbe (C_f).



4) a – Montrer que $u: x\to \frac{x^3}{3}-x$ est une primitive de la fonction $v: x\to x^2-1$ sur $\mathbb{R}$

$$u'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)'=\frac{1}{3}3x^2-1=x^2-1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

D'où $u: x\to \frac{x^3}{3}-x$ est une primitive de la fonction $v: x\to x^2-1$ sur $\mathbb{R}$

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_1^2 (x^2-1)\ln x\,dx=\frac{2}{9}(1+3\ln 2)$

$u(x)=\ln x \qquad u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=x^2-1 \qquad v(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

$$\int_1^2 (x^2-1)\ln x\,dx=\left[(\tfrac{1}{3}x^3-x)\ln x\right]_1^2-\int_1^2(\tfrac{1}{3}x^3-x)\tfrac{1}{x}dx$$

$$=(\tfrac{8}{3}-2)\ln 2-\int_1^2(\tfrac{1}{3}x^2-1)dx=\tfrac{2}{3}\ln 2-\left[\tfrac{1}{9}x^3-x\right]_1^2$$

$$=\tfrac{2}{3}\ln 2-(\tfrac{8}{9}-2-\tfrac{1}{9}+1)=\tfrac{2}{3}\ln 2-\tfrac{7}{9}+1=\tfrac{2}{3}\ln 2+\tfrac{2}{9}$$

D'où $\int_1^2 (x^2-1)\ln x\,dx=\frac{2}{9}(1+3\ln 2)$

c – Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = 2.

$$A=\int_1^2 |f(x)|dx\times 3cm\times 3cm$$

$$A=\int_1^2 (x^2-1)\ln x\,dx\times 9cm^2=\frac{2}{9}(1+3\ln 2)9cm^2$$

D'où $A=(2+6\ln 2)cm^2$