Lycée Ibn Khaldoun BOUZNIKA	L'examen national 2011 SR	AGOUZAL
Année scolaire : 2019 – 2020		2 BPCF

Exercice 1 : (2,5 pts)

1) a - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

b – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$$

Exercice 2 : (4 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - 6Z + 18 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 3+3i$, $b = 3-3i$

a – Ecrire a et b sous forme trigonométrique

b – Montrer que b' l'affixe du point B' image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ est 6

c – Montrer que : $\dfrac{b-b'}{a-b'} = i$ puis en déduire que le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'.

d – En déduire que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré

Exercice 3 : (3,5 pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{6U_n}{15U_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

1) a – Montrer que: $U_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b – Montrer que : $U_n > \dfrac{1}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = 1 - \frac{1}{3U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$ puis écrire V_n en fonction de n.

3) Montrer que $U_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et en déduire $\lim U_n$

Problème : : (10 pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $I =]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$

1) a – Montrer que $g'(x) = \dfrac{x+1}{x} \quad \forall x \in I$

b – Montrer que g est croissante sur I

2) En déduire que : $g(x) \geq 0$ sur $[1,+\infty[$ et $g(x) \leq 0$ sur $]0,1]$ (Remarquer que g(1) = 0)

Deuxième partie

On considère la fonction f définie sur $I =]0;+\infty[$ par : $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

b – Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

(Remarquer que $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x} \quad \forall x \in I$)

c – En déduire que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction à déterminer.

2) a – Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2} \quad \forall x \in I$

b – En déduire que f est croissante sur $[1,+\infty[$ et décroissante sur $]0,1]$.

c – Dresser le tableau des variations de f.

3) Construire la courbe (C_f) (on admettra que (C_f) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 1,5 et 2).

4) a – Montrer que $H : x \to \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $h : x \to \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$

b – Montrer que : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}$

c – A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\displaystyle\int_1^e \ln x \, dx = 1$

5) a – Vérifier que : $f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x} \quad \forall x \in I$

b – Montrer que l'aire du domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = e est $0,5 \text{ cm}^2$.