

Exercice 1 : (2010 SN) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct

$(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $\mathbf{A}(-1;0;3)$; $\mathbf{B}(3;0;0)$; $\mathbf{C}(7;1;-3)$

et (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

1) Montrer que: $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ et en déduire que : $3x + 4z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
 $\mathbf{C}(7;1;-3)$; $\mathbf{B}(3;0;0)$; $\mathbf{A}(-1;0;3)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\mathbf{AC}} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 3\vec{i} + 4\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$

Soit $\mathbf{M}(x;y;z) \in (\text{ABC})$

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à (ABC)}$$

$$(\text{ABC}) : 3x + 4z + d = 0$$

$$\text{Or } \mathbf{B}(3;0;0) \in (\text{ABC})$$

$$\text{Donc } 3 \times 3 + 4 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$$

$$\text{D'où } (\text{ABC}) : 3x + 4z - 9 = 0$$

2) Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(3;1;0)$ et de rayon 5

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

$$\mathbf{a} = \frac{-6}{-2} ; \mathbf{b} = \frac{-2}{-2} ; \mathbf{c} = \frac{0}{-2} ; \mathbf{d} = -5$$

$$\text{Donc } \mathbf{a} = 3 ; \mathbf{b} = 1 ; \mathbf{c} = 0 ; \mathbf{d} = -15$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 15 = 9 + 1 + 15 = 25 > 0$$

$$\text{Donc le centre de (S) est } \Omega(3;1;0) \text{ et } \mathbf{R} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{D'où } \Omega(3;1;0) \text{ et rayon } \mathbf{R} = 5$$

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

$$\text{a) Montrer que } \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ est une}$$

représentation paramétrique de la droite (Δ) .

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}}(3;0;4) \text{ est un vecteur normal au plan (ABC)}$$

donc c'est un vecteur directeur de (Δ)

$$\text{Soit } \mathbf{M}(x;y;z) \in (\Delta) \quad \Omega(3;1;0)$$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + 0 \times t \\ z = 0 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

b) Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux deux points $\mathbf{E}(6, 1, 4)$ et $\mathbf{F}(0, 1, -4)$

$\mathbf{M}(x;y;z) \in (\Delta) \cap (\text{S})$ équivaut à

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases}$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$$

$$(3+3t-3)^2 + (1-1)^2 + (4t)^2 = 25$$

$$9t^2 + 16t^2 = 25 \Leftrightarrow 25t^2 = 25 \Leftrightarrow t = 1 \text{ ou } t = -1$$

$$\text{Si } t = 1 \text{ donc } \begin{cases} x = 3 + 3 \times 1 \\ y = 1 \\ z = 0 + 4 \times 1 \end{cases} \text{ donc } \mathbf{E}(6;1;4)$$

$$\text{Si } t = -1 \text{ donc } \begin{cases} x = 3 + 3 \times (-1) \\ y = 1 \\ z = 0 + 4 \times (-1) \end{cases} \text{ donc } \mathbf{F}(0;1;-4)$$

$$(\Delta) \cap (\text{S}) = \{\mathbf{E}(6;1;4); \mathbf{F}(0;1;-4)\}$$

Exercice 2 : (2010 SN) (3pts)

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 6z + 10 = 0$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 10 \Leftrightarrow \Delta = 36 - 40 \Leftrightarrow \Delta = -4$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{6 + i\sqrt{4}}{2} = \frac{6 + 2i}{2} = 3 + i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 3 - i$$

$$\text{D'où } \mathbf{S} = \{3 - i; 3 + i\}$$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct

$(\mathbf{O}; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes

$$\text{respectives } \mathbf{a} = 3 - i, \mathbf{b} = 3 + i ; \mathbf{c} = 7 - 3i$$

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M'

image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{a) Montrer que : } z' = iz + 2 - 4i$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}' \Leftrightarrow z' - \mathbf{a} = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \mathbf{a})$$

$$\Leftrightarrow z' = (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})(z - 3 + i) + 3 - i$$

$$\Leftrightarrow z' = iz - 3i - 1 + 3 - i$$

$$\text{D'où } z' = iz + 2 - 4i$$

b) Vérifier que : l'axe du point C' l'image du point C par la rotation R est : $\mathbf{c}' = 5 + 3\mathbf{i}$

$$\mathbf{R}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}' \Leftrightarrow \mathbf{c}' = \mathbf{i}\mathbf{c} + 2 - 4\mathbf{i}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{c}' = \mathbf{i}(7 - 3\mathbf{i}) + 2 - 4\mathbf{i}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{c}' = 7\mathbf{i} + 3 + 2 - 4\mathbf{i} \Leftrightarrow \mathbf{c}' = 5 + 3\mathbf{i}$$

c) Montrer que : $\frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2}\mathbf{i}$ puis en déduire que le

triangle BCC' est rectangle en B et $\mathbf{BC} = 2\mathbf{BC}'$

$$\frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{5 + 3\mathbf{i} - 3 - \mathbf{i}}{7 - 3\mathbf{i} - 3 - \mathbf{i}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{2 + 2\mathbf{i}}{4 - 4\mathbf{i}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{2(1 + \mathbf{i})}{4(1 - \mathbf{i})} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2} \frac{(1 + \mathbf{i})^2}{(1 - \mathbf{i})(1 + \mathbf{i})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2} \frac{2\mathbf{i}}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2}\mathbf{i}$$

$$\text{D'où } \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2}\mathbf{i}$$

$$\text{On a } \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2}\mathbf{i} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Donc } \arg\left(\frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{Or } (\overline{\mathbf{BC}}; \overline{\mathbf{BC}'}) \equiv \arg\left(\frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}}\right) [2\pi]$$

Donc $(\overline{\mathbf{BC}}; \overline{\mathbf{BC}'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc le triangle BCC' est rectangle en B.

$$\text{On a } \left| \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|\mathbf{c}' - \mathbf{b}|}{|\mathbf{c} - \mathbf{b}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{BC}'}{\mathbf{BC}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\mathbf{BC}'}{\mathbf{BC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathbf{BC} = 2\mathbf{BC}'$$

D'où $\mathbf{BC} = 2\mathbf{BC}'$

Exercice 3 : (2010 S1) (3pts)

1) On considère les deux événements :

Montrer que $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{41}{42}$

5 B ; 3 R ; 2 N

On tire simultanément et au hasard 4 boules du sac

$$\mathbf{Card}(\Omega) = \mathbf{C}_{10}^4 = 210$$

A" Obtenir une seule boule rouge"

$$3(\mathbf{R}) \quad 7(\overline{\mathbf{R}})$$

$$\mathbf{Card}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}_3^1 \times \mathbf{C}_7^3 = 3 \times 35 = 105$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{Card}(\mathbf{A})}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$$

B " Obtenir une boule blanche au moins "

Première méthode

$\overline{\mathbf{B}}$ "Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées"

$$5(\mathbf{B}) \quad ; \quad 5(\overline{\mathbf{B}})$$

$$\mathbf{Card}(\overline{\mathbf{B}}) = \mathbf{C}_5^4 = 5$$

$$\mathbf{P}(\overline{\mathbf{B}}) = \frac{\mathbf{Card}(\overline{\mathbf{B}})}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{B}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{\mathbf{B}}) = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$$

$$\text{D'où } \mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{41}{42}$$

Deuxième méthode

$$5(\mathbf{B}) \quad ; \quad 5(\overline{\mathbf{B}})$$

$$\mathbf{Card}(\mathbf{B}) = \mathbf{C}_5^1 \times \mathbf{C}_5^3 + \mathbf{C}_5^2 \times \mathbf{C}_5^2 + \mathbf{C}_5^3 \times \mathbf{C}_5^1 + \mathbf{C}_5^4$$

$$\mathbf{Card}(\mathbf{B}) = 50 + 100 + 50 + 5 = 205$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{\mathbf{Card}(\mathbf{B})}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{205}{210} = \frac{41}{42}$$

$$\text{D'où } \mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{41}{42}$$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associer le nombre de boules rouges tirées.

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3

On peut obtenir :

* Aucune boule rouge parmi les quatre boules tirées.

Donc X = 0.

* Une seule boule rouge parmi les quatre boules tirées.

Donc X = 1.

* Deux boules rouges parmi les quatre boules tirées.

Donc X = 2.

* Trois boules rouges parmi les quatre boules tirées.

Donc X = 3.

D'où les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3

b) Montrer que $\mathbf{P}(\mathbf{X} = 0) = \frac{1}{6}$ et $\mathbf{P}(\mathbf{X} = 2) = \frac{3}{10}$

$$3(\mathbf{R}) \quad ; \quad 7(\overline{\mathbf{R}})$$

$$\mathbf{card}(\mathbf{X} = 0) = \mathbf{C}_7^4 = 35$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = 0) = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{card}(\mathbf{X} = 2) = \mathbf{C}_3^2 \times \mathbf{C}_7^2 = 3 \times 21 = 63$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = 2) = \frac{63}{210} = \frac{3}{10}$$

c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = 1) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}$$

Première méthode

$$3(\mathbf{R}) \quad ; \quad 7(\overline{\mathbf{R}})$$

$$\mathbf{card}(\mathbf{X} = 3) = \mathbf{C}_3^3 \times \mathbf{C}_7^1 = 7$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = 3) = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$$

Deuxième méthode

On sait que

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = 0) + \mathbf{P}(\mathbf{X} = 1) + \mathbf{P}(\mathbf{X} = 2) + \mathbf{P}(\mathbf{X} = 3) = 1$$

$$\text{Donc } \mathbf{P}(\mathbf{X} = 3) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{X} = 0) - \mathbf{P}(\mathbf{X} = 1) - \mathbf{P}(\mathbf{X} = 2)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = 3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

$$\text{D'où } \mathbf{P}(\mathbf{X} = 3) = \frac{1}{30}$$

k	0	1	2	3
P(X= k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

(Remarque $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = 1$)

Exercice 4 : (2010 SN) (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{3U_n - 1}{2U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 2$$

1) Montrer que : $U_n - 1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 2$ donc $U_0 - 1 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n - 1 > 0$ et montrons que $U_{n+1} - 1 > 0$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{3U_n - 1}{2U_n} - 1 = \frac{3U_n - 1 - 2U_n}{2U_n}$$

$$\text{Donc } U_{n+1} - 1 = \frac{U_n - 1}{2U_n} \quad \text{on a } U_n - 1 > 0 \quad (1)$$

$$\text{Donc } U_n > 1 \quad \text{donc } 2U_n > 2 \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2) } \frac{U_n - 1}{2U_n} > 0 \quad \text{donc } U_{n+1} - 1 > 0$$

$$\text{D'où } U_n - 1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2) \text{ Soit } (V_n) \text{ définie par : } V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et en déduire que $V_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrons que $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$?

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{2U_{n+1} - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{2U_{n+1} - 1} = \frac{\frac{U_n - 1}{2U_n}}{2 \frac{3U_n - 1}{2U_n} - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{\frac{U_n - 1}{2U_n}}{\frac{3U_n - 1 - 2U_n}{U_n}} = \frac{U_n - 1}{4U_n - 2}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_n - 1}{2U_n - 1} \right)$$

$$\text{Donc } V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$V_0 = \frac{U_0 - 1}{2U_0 - 1} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad V_n = V_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{D'où } V_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b) \text{ Montrer que : } U_n = \frac{V_n - 1}{2V_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

en déduire que $\lim U_n = 1$

$$V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1} \Leftrightarrow V_n(2U_n - 1) = U_n - 1$$

$$\Leftrightarrow 2V_n U_n - V_n = U_n - 1$$

$$\Leftrightarrow 2V_n U_n - U_n = V_n - 1$$

$$\Leftrightarrow U_n(2V_n - 1) = V_n - 1 \Leftrightarrow U_n = \frac{V_n - 1}{2V_n - 1}$$

$$\text{D'où } U_n = \frac{V_n - 1}{2V_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } U_n = \frac{V_n - 1}{2V_n - 1} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{D'où } U_n = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim U_n = \lim \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1$$

$$\text{Car } -1 < \frac{1}{2} < 1 \quad \text{et} \quad \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\text{D'où } \lim U_n = 1$$

3) Calculer $\lim W_n$ telle que (W_n) la suite définie par :

$$W_n = \ln U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } W_n = \ln U_n$$

$$\lim W_n = \lim \ln U_n \Leftrightarrow \lim W_n = \ln 1 = 0$$

car la fonction \ln est continue en 1.

Problème : (2010 SN) (8pts)

1) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 1 + 4xe^{2x}$$

1) Montrer que $g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = 1 + 4xe^{2x}$$

$$g'(x) = 4e^{2x} + 4x \times (2x)' e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 4e^{2x} + 8xe^{2x} \Leftrightarrow g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x}$$

$$\text{D'où } g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2) Montrer que g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

$$\text{On a } g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $(2x + 1)$

$$\text{Car } e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} ; 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad g'(x) \geq 0$ donc g est croissantes sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$
 $\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \quad g'(x) \leq 0$ donc g est décroissantes sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

3) a) Montrer que $g(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{2}{e}$ et vérifier que $g(-\frac{1}{2}) > 0$

$$g(x) = 1 + 4xe^{2x} \text{ donc } g(-\frac{1}{2}) = 1 + 4(-\frac{1}{2})e^{2(-\frac{1}{2})} = 1 - 2e^{-1}$$

$$\text{D'où } g(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{2}{e}$$

$$g(-\frac{1}{2}) = \frac{e-2}{e} \text{ donc } g(-\frac{1}{2}) > 0 \text{ car } e \approx 2,7$$

b) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de R.

On a g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

Donc $g(-\frac{1}{2}) = \frac{e-2}{e}$ est le minimum de g sur R

$$\text{Donc } g(x) \geq g(-\frac{1}{2}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{D'où } g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

II) On considère la fonction f définie sur R par

$$f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O; i, j) (unité : 2 cm)

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ (on rappelle que } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1 = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1 = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$$

2) Montrer que : $f'(x) = g(x)$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur R

$$f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2e^{2x} + (2x-1)2e^{2x} + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x} + 1$$

$$f'(x) = 1 + 4xe^{2x} = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Or } g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur R

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que la courbe (C)

admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)e^{2x} + x + 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{x}\right)e^{2x} + 1 + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)e^{2x} + 1 + \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe (C) admet une

branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$ en déduire que la

droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [(2x-1)e^{2x} + x + 1 - (x+1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$ donc la droite (Δ)

d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{2}[$ et

qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; +\infty[$

$$f(x) - (x+1) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{2x} = 0$$

$$\text{Or } e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) - (x+1) = 0 \Leftrightarrow (2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	-	0	+

$$f(x) - (x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$(\Delta) \cap (C) = \left\{ A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \right\}$$

$$\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[\quad f(x) > (x+1) \text{ la courbe (C) est}$$

au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; +\infty[$

$$\forall x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\quad f(x) < (x+1) \text{ la courbe (C) est}$$

en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{2}[$.

4) a) Montrer que $y = x$ une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = x \text{ car } f(0) = 0; f'(0) = 1$$

(T) : $y = x$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

b) Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$

$$\text{On a } f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } f''(x) = g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Or } g'(x) = 4(2x+1)e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+

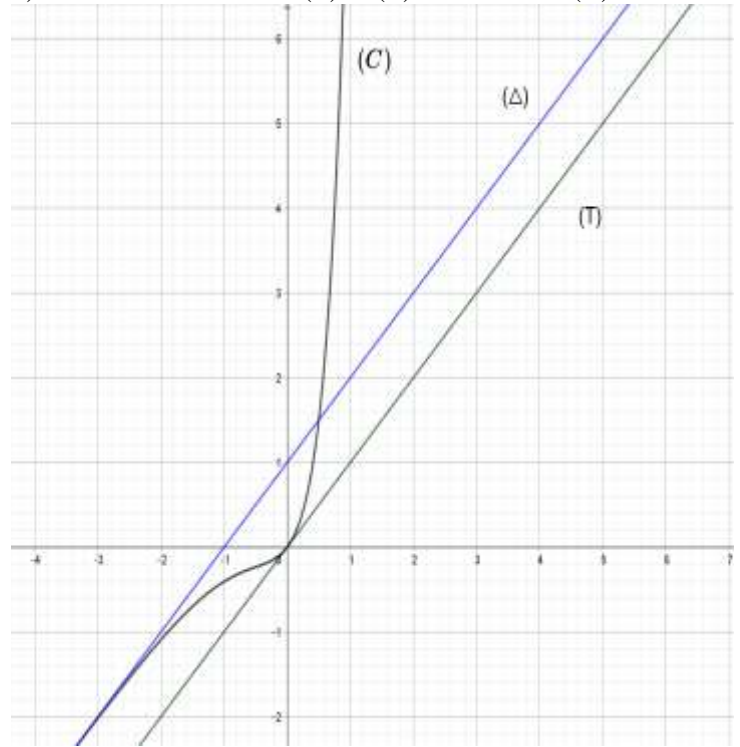
$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\quad f''(x) \geq 0$$

$$\forall x \in]-\infty; -\frac{1}{2}] \quad f''(x) \leq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

La courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

5) Construire les droites (Δ) et (T) et la courbe (C).



6) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer

$$\text{que : } \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$$

6) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer

$$\text{que : } \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$$

$$u(x) = 2x-1$$

$$u'(x) = 2$$

$$v'(x) = e^{2x}$$

$$v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} 2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx$$

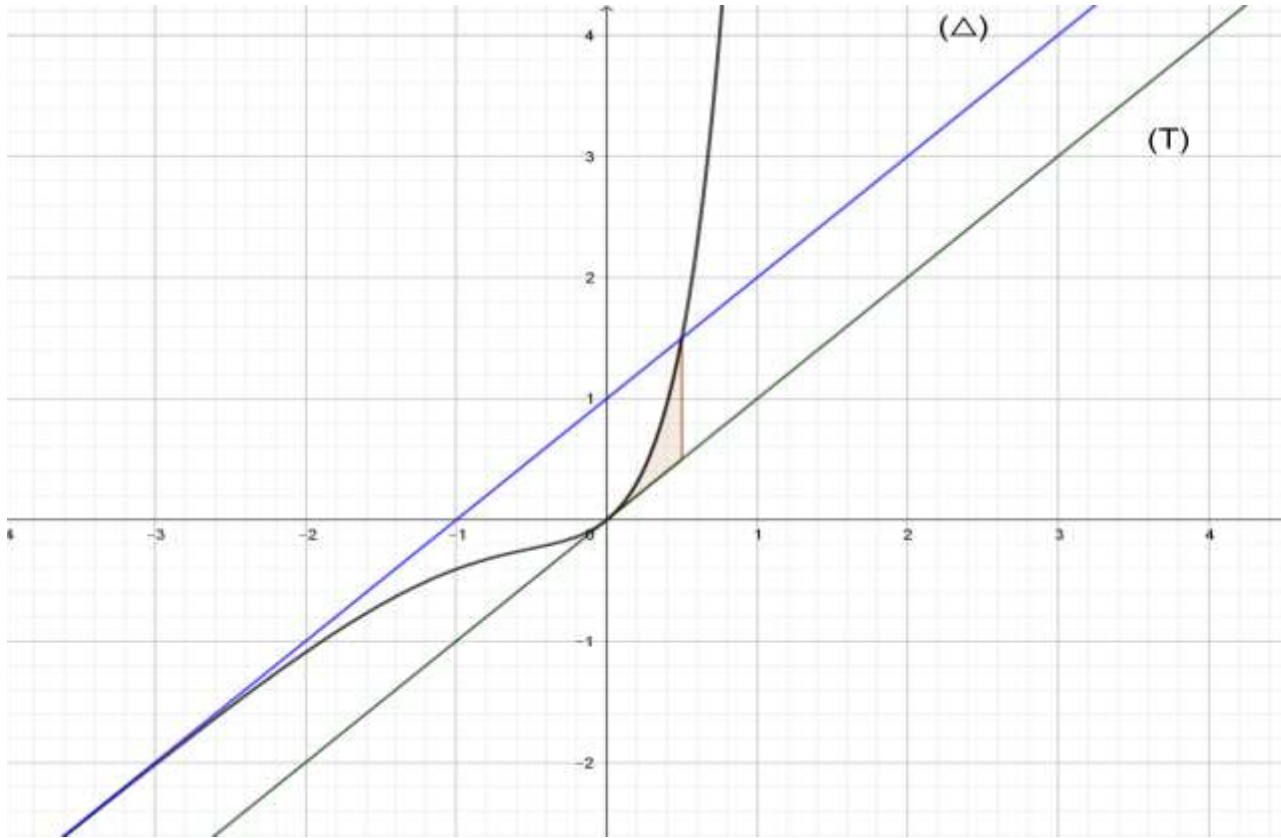
$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = 0 + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = \frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{e}{2}$$

$$\text{D'où } \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$$

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par (C), la tangente (T) à (C) et les deux droites $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ est $(6-2e)\text{cm}^2$.



$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - x| dx \quad 2\text{cm} \times 2\text{cm}$$

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - x) dx \quad 4\text{cm}^2 \quad f(x) \geq x \quad \forall x \in [0; +\infty[$$

On pose $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - x) dx$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} ((2x-1)e^{2x} + x + 1 - x) dx$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} ((2x-1)e^{2x} + 1) dx \Leftrightarrow I = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx$$

$x \rightarrow (2x-1)e^{2x}$ et $x \rightarrow 1$ sont continues sur \mathbb{R} en particulier sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

$$I = 1 - \frac{e}{2} + \left[x\right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad I = \frac{3}{2} - \frac{e}{2}$$

D'où $A = (6-2e)\text{cm}^2$