

Exercice 1 : (2010 SN) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct

$(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ les points $\mathbf{A}(-1; 0; 3)$; $\mathbf{B}(3; 0; 0)$; $\mathbf{C}(7; 1; -3)$

et (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

1) Montrer que: $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} = 3\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$ et en déduire que :

$3x + 4z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

$\mathbf{C}(7; 1; -3)$; $\mathbf{B}(3; 0; 0)$; $\mathbf{A}(-1; 0; 3)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\mathbf{AC}} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{k}} \\ &= 3\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} = 3\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$

Soit $\mathbf{M}(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}) \in (\mathbf{ABC})$

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à (ABC)}$$

$$(\mathbf{ABC}) : 3x + 4z + \mathbf{d} = 0$$

$$\text{Or } \mathbf{B}(3; 0; 0) \in (\mathbf{ABC})$$

$$\text{Donc } 3 \times 3 + 4 \times 0 + \mathbf{d} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{d} = -9$$

$$\text{D'où } (\mathbf{ABC}) : 3x + 4z - 9 = 0$$

2) Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(3; 1; 0)$ et de rayon 5

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

$$\mathbf{a} = \frac{-6}{-2}; \quad \mathbf{b} = \frac{-2}{-2}; \quad \mathbf{c} = \frac{0}{-2}; \quad \mathbf{d} = -5$$

$$\text{Donc } \mathbf{a} = 3; \quad \mathbf{b} = 1; \quad \mathbf{c} = 0; \quad \mathbf{d} = -15$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 15 = 9 + 1 + 15 = 25 > 0$$

Donc le centre de (S) est $\Omega(3; 1; 0)$ et $R = \sqrt{25} = 5$

D'où $\Omega(3; 1; 0)$ et rayon $R = 5$

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que $\begin{cases} \mathbf{x} = 3 + 3t \\ \mathbf{y} = 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ \mathbf{z} = 4t \end{cases}$ est une

représentation paramétrique de la droite (Δ).

$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}}(3; 0; 4)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

donc c'est un vecteur directeur de (Δ)

Soit $\mathbf{M}(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}) \in (\Delta)$

$$\Omega(3; 1; 0)$$

$$(\Delta) : \begin{cases} \mathbf{x} = 3 + 3t \\ \mathbf{y} = 1 + 0 \times t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ \mathbf{z} = 0 + 4t \end{cases}$$

$$(\Delta) : \begin{cases} \mathbf{x} = 3 + 3t \\ \mathbf{y} = 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ \mathbf{z} = 4t \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux deux points E(6, 1, 4) et F(0, 1, -4)

$\mathbf{M}(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}) \in (\Delta) \cap (S)$ équivaut à

$$\begin{cases} \mathbf{x} = 3 + 3t \\ \mathbf{y} = 1 \\ \mathbf{z} = 4t \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 25 \\ (3 + 3t - 3)^2 + (1 - 1)^2 + (4t)^2 = 25 \\ 9t^2 + 16t^2 = 25 \Leftrightarrow 25t^2 = 25 \Leftrightarrow t = 1 \text{ ou } t = -1 \end{cases}$$

$$\text{Si } t = 1 \text{ donc } \begin{cases} \mathbf{x} = 3 + 3 \times 1 \\ \mathbf{y} = 1 \quad \text{donc } \mathbf{E}(6; 1; 4) \\ \mathbf{z} = 0 + 4 \times 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } t = -1 \text{ donc } \begin{cases} \mathbf{x} = 3 + 3 \times (-1) \\ \mathbf{y} = 1 \quad \text{donc } \mathbf{F}(0; 1; -4) \\ \mathbf{z} = 0 + 4 \times (-1) \end{cases}$$

$$(\Delta) \cap (S) = \{\mathbf{E}(6; 1; 4); \mathbf{F}(0; 1; -4)\}$$

Exercice 2 : (2010 SN) (3pts)

1) Résoudre dans C l'équation : $\mathbf{z}^2 - 6\mathbf{z} + 10 = 0$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 10 \Leftrightarrow \Delta = 36 - 40 \Leftrightarrow \Delta = -4$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\mathbf{z}_1 = \frac{6 + i\sqrt{4}}{2} = \frac{6 + 2i}{2} = 3 + i \text{ et } \mathbf{z}_2 = \overline{\mathbf{z}_1} = 3 - i$$

$$\text{D'où } \mathbf{S} = \{3 - i; 3 + i\}$$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $\mathbf{a} = 3 - i$, $\mathbf{b} = 3 + i$; $\mathbf{c} = 7 - 3i$. Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que : $z' = iz + 2 - 4i$

$$\mathbf{R}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}' \Leftrightarrow \mathbf{z}' - \mathbf{a} = e^{i\frac{\pi}{2}}(\mathbf{z} - \mathbf{a})$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{z}' = (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})(\mathbf{z} - 3 + i) + 3 - i$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{z}' = iz - 3i - 1 + 3 - i$$

$$\text{D'où } \mathbf{z}' = iz + 2 - 4i$$

b) Vérifier que : l'affixe du point C' l'image du point C par la rotation R est : $\mathbf{c}' = 5 + 3\mathbf{i}$

$$\mathbf{R}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}' \Leftrightarrow \mathbf{c}' = \mathbf{i}\mathbf{c} + 2 - 4\mathbf{i}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{c}' = \mathbf{i}(7 - 3\mathbf{i}) + 2 - 4\mathbf{i}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{c}' = 7\mathbf{i} + 3 + 2 - 4\mathbf{i} \Leftrightarrow \mathbf{c}' = 5 + 3\mathbf{i}$$

c) Montrer que : $\frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2}\mathbf{i}$ puis en déduire que le triangle BCC' est rectangle en B et $\mathbf{BC} = 2\mathbf{BC}'$

$$\frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{5 + 3\mathbf{i} - 3 - \mathbf{i}}{7 - 3\mathbf{i} - 3 - \mathbf{i}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{2 + 2\mathbf{i}}{4 - 4\mathbf{i}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{2(1 + \mathbf{i})}{4(1 - \mathbf{i})} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2} \frac{(1 + \mathbf{i})^2}{(1 - \mathbf{i})(1 + \mathbf{i})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2} \frac{2\mathbf{i}}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2}\mathbf{i}$$

D'où $\frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2}\mathbf{i}$

On a $\frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2}\mathbf{i} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\pi}{2})$

Donc $\arg\left(\frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Or $(\overrightarrow{\mathbf{BC}}; \overrightarrow{\mathbf{BC}'}) \equiv \arg\left(\frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}}\right)[2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{\mathbf{BC}}; \overrightarrow{\mathbf{BC}'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc le triangle BCC' est rectangle en B.

On a $\left| \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{BC}'}{\mathbf{BC}} = \frac{1}{2}$

$$\frac{\mathbf{BC}'}{\mathbf{BC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathbf{BC} = 2\mathbf{BC}'$$

D'où $\mathbf{BC} = 2\mathbf{BC}'$

Exercice 3 : (2010 S1) (3pts)

1) On considère les deux événements :

Montrer que $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{41}{42}$

5 B ; 3 R ; 2 N

On tire simultanément et au hasard 4 boules du sac

$$\mathbf{Card}(\Omega) = \mathbf{C}_{10}^4 = 210$$

A" Obtenir une seule boule rouge"

$$3(R) \quad 7(\bar{R})$$

$$\mathbf{Card}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}_3^1 \times \mathbf{C}_7^3 = 3 \times 35 = 105$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{Card}(\mathbf{A})}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$$

B " Obtenir une boule blanche au moins "

Première méthode

B" Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées"

5 (B) ; 5(\bar{B})

$$\mathbf{Card}(\bar{B}) = \mathbf{C}_5^4 = 5$$

$$\mathbf{P}(\bar{B}) = \frac{\mathbf{Card}(\bar{B})}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 1 - \mathbf{P}(\bar{\mathbf{B}}) = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$$

D'où $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{41}{42}$

Deuxième méthode

5 (B) ; 5(\bar{B})

$$\mathbf{Card}(\mathbf{B}) = \mathbf{C}_5^1 \times \mathbf{C}_5^3 + \mathbf{C}_5^2 \times \mathbf{C}_5^2 + \mathbf{C}_5^3 \times \mathbf{C}_5^1 + \mathbf{C}_5^4$$

$$\mathbf{Card}(\mathbf{B}) = 50 + 100 + 50 + 5 = 205$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{\mathbf{Card}(\mathbf{B})}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{205}{210} = \frac{41}{42}$$

D'où $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{41}{42}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associer le nombre de boules rouges tirées.

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3
On peut obtenir :

* Aucune boule rouge parmi les quatre boules tirées.

Donc $X = 0$.

*Une seule boule rouge parmi les quatre boules tirées.

Donc $X = 1$.

*Deux boules rouges parmi les quatre boules tirées.

Donc $X = 2$.

*Trois boules rouges parmi les quatre boules tirées.

Donc $X = 3$.

D'où les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3

b) Montrer que $\mathbf{P}(\mathbf{X} = 0) = \frac{1}{6}$ et $\mathbf{P}(\mathbf{X} = 2) = \frac{3}{10}$

3 (R) ; 7(\bar{R})

$$\mathbf{card}(\mathbf{X} = 0) = \mathbf{C}_7^4 = 35$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = 0) = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{card}(\mathbf{X} = 2) = \mathbf{C}_3^2 \times \mathbf{C}_7^2 = 3 \times 21 = 63$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = 2) = \frac{63}{210} = \frac{3}{10}$$

c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = 1) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}$$

Première méthode

3 (R) ; 7(\bar{R})

$$\mathbf{card}(\mathbf{X} = 3) = \mathbf{C}_3^3 \times \mathbf{C}_7^1 = 7$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = 3) = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$$

Deuxième méthode

On sait que

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = 0) + \mathbf{P}(\mathbf{X} = 1) + \mathbf{P}(\mathbf{X} = 2) + \mathbf{P}(\mathbf{X} = 3) = 1$$

Donc $\mathbf{P}(\mathbf{X} = 3) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{X} = 0) - \mathbf{P}(\mathbf{X} = 1) - \mathbf{P}(\mathbf{X} = 2)$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = 3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

D'où $\mathbf{P}(\mathbf{X} = 3) = \frac{1}{30}$

k	0	1	2	3
P(X=k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

(Remarque $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = 1$)

Exercice 4 : (2010 SN) (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{3U_n - 1}{2U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 2$$

1) Montrer que : $U_n - 1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 2$ donc $U_0 - 1 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n - 1 > 0$ et montrons que $U_{n+1} - 1 > 0$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{3U_n - 1}{2U_n} - 1 = \frac{3U_n - 1 - 2U_n}{2U_n}$$

Donc $U_{n+1} - 1 = \frac{U_n - 1}{2U_n}$ on a $U_n - 1 > 0$ (1)

Donc $U_n > 1$ donc $2U_n > 2$ (2)

De (1) et (2) $\frac{U_n - 1}{2U_n} > 0$ donc $U_{n+1} - 1 > 0$

D'où $U_n - 1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Soit (V_n) définie par : $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et en déduire que $V_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrons que $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$?

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{2U_{n+1} - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{2U_{n+1} - 1} = \frac{\frac{U_n - 1}{2U_n}}{2 \frac{3U_n - 1}{2U_n} - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{\frac{U_n - 1}{2U_n}}{\frac{6U_n - 2 - 2U_n}{2U_n}} = \frac{U_n - 1}{4U_n - 2}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_n - 1}{2U_n - 1} \right)$$

$$\text{Donc } V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$V_0 = \frac{U_0 - 1}{2U_0 - 1} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad V_n = V_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{D'où } V_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Montrer que : $U_n = \frac{V_n - 1}{2V_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

en déduire que $\lim U_n = 1$

$$V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1} \Leftrightarrow V_n(2U_n - 1) = U_n - 1$$

$$\Leftrightarrow 2V_n U_n - V_n = U_n - 1$$

$$\Leftrightarrow 2V_n U_n - U_n = V_n - 1$$

$$\Leftrightarrow U_n(2V_n - 1) = V_n - 1 \Leftrightarrow U_n = \frac{V_n - 1}{2V_n - 1}$$

$$\text{D'où } U_n = \frac{V_n - 1}{2V_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } U_n = \frac{V_n - 1}{2V_n - 1} \text{ et } V_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{D'où } U_n = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim U_n = \lim \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1$$

Car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$$\text{D'où } \lim U_n = 1$$

3) Calculer $\lim W_n$ telle que (W_n) la suite définie par :

$$W_n = \ln U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } W_n = \ln U_n$$

$$\lim W_n = \lim \ln U_n \Leftrightarrow \lim W_n = \ln 1 = 0$$

car la fonction \ln est continue en 1.

Problème : (2010 SN) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 1 + 4xe^{2x}$$

1) Montrer que $g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = 1 + 4xe^{2x}$$

$$g'(x) = 4e^{2x} + 4x \times (2x)'e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 4e^{2x} + 8xe^{2x} \Leftrightarrow g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x}$$

$$\text{D'où } g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2) Montrer que g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et

décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

$$\text{On a } g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $(2x + 1)$

$$\text{Car } e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	- ∞	$-\frac{1}{2}$	+∞
$2x + 1$	-	0	+

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$ $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$
 $\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

3) a) Montrer que $g(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{2}{e}$ et vérifier que $g(-\frac{1}{2}) > 0$

$$g(x) = 1 + 4xe^{2x} \text{ donc } g(-\frac{1}{2}) = 1 + 4(-\frac{1}{2})e^{2(-\frac{1}{2})} = 1 - 2e^{-1}$$

$$\text{D'où } g(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{2}{e}$$

$$g(-\frac{1}{2}) = \frac{e-2}{e} \text{ donc } g(-\frac{1}{2}) > 0 \text{ car } e \approx 2,7$$

b) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de R.

On a g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$ et

décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

Donc $g(-\frac{1}{2}) = \frac{e-2}{e}$ est le minimum de g sur R

Donc $g(x) \geq g(-\frac{1}{2}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où $g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

II) On considère la fonction f définie sur R par

$$f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé ($O; \vec{i}; \vec{j}$) (unité : 2 cm)

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ (on rappelle que } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1 = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1 = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$$

2) Montrer que : $f'(x) = g(x)$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur R

$$f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2e^{2x} + (2x-1)2e^{2x} + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x} + 1$$

$$f'(x) = 1 + 4xe^{2x} = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Or $g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur R

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que la courbe (C)

admet une branche parabolique au voisinage de +∞ de direction l'axe des ordonnées.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)e^{2x} + x + 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} - \frac{1}{x} \right) e^{2x} + 1 + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) e^{2x} + 1 + \frac{1}{x} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2 \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe (C) admet une

branche parabolique au voisinage de +∞ de direction l'axe des ordonnées.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$ en déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de -∞.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [(2x-1)e^{2x} + x + 1 - (x+1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} = 0 \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$ donc la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de -∞.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{2}[$ et qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; +\infty[$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow (2\mathbf{x} - 1)e^{2\mathbf{x}} = 0$$

Or $e^{2\mathbf{x}} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow (2\mathbf{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2\mathbf{x} - 1$	-	0	+

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$(\Delta) \cap (C) = \left\{ A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \right\}$$

$\forall \mathbf{x} \in]\frac{1}{2}; +\infty[\quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) > (\mathbf{x} + 1)$ la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; +\infty[$

$\forall \mathbf{x} \in]-\infty; \frac{1}{2}[\quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) < (\mathbf{x} + 1)$ la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{2}[$.

4) a) Montrer que $y = x$ une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = x \text{ car } f(0) = 0 ; f'(0) = 1$$

(T) : $y = x$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

b) Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$

On a $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $f''(x) = g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Or $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$	-	0	+

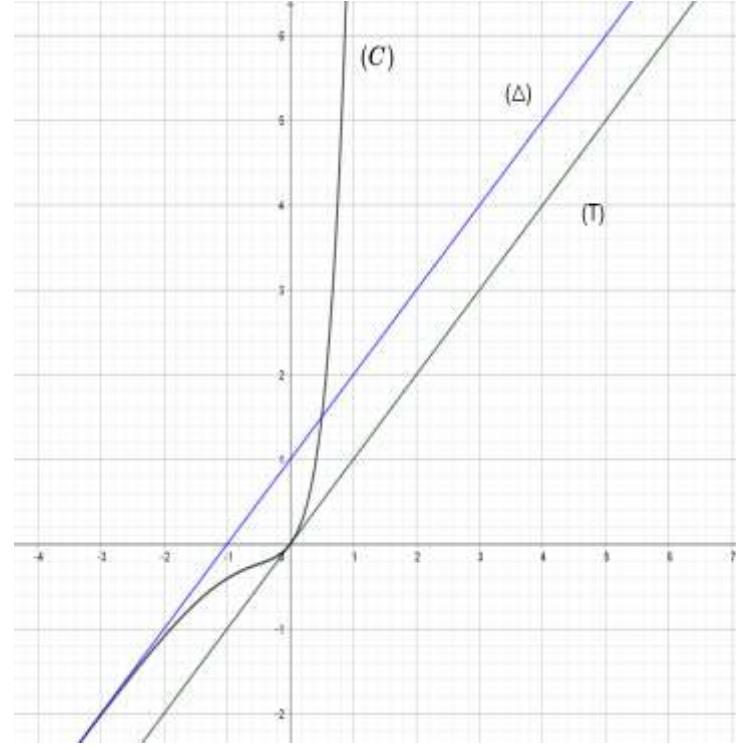
$\forall x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[\quad f''(x) \geq 0$

$\forall x \in]-\infty; -\frac{1}{2}] \quad f''(x) \leq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

La courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

5) Construire les droites (Δ) et (T) et la courbe (C).



6) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$

6) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$

$$u(x) = 2x - 1 \quad u'(x) = 2$$

$$v'(x) = e^{2x} \quad v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} 2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} dx$$

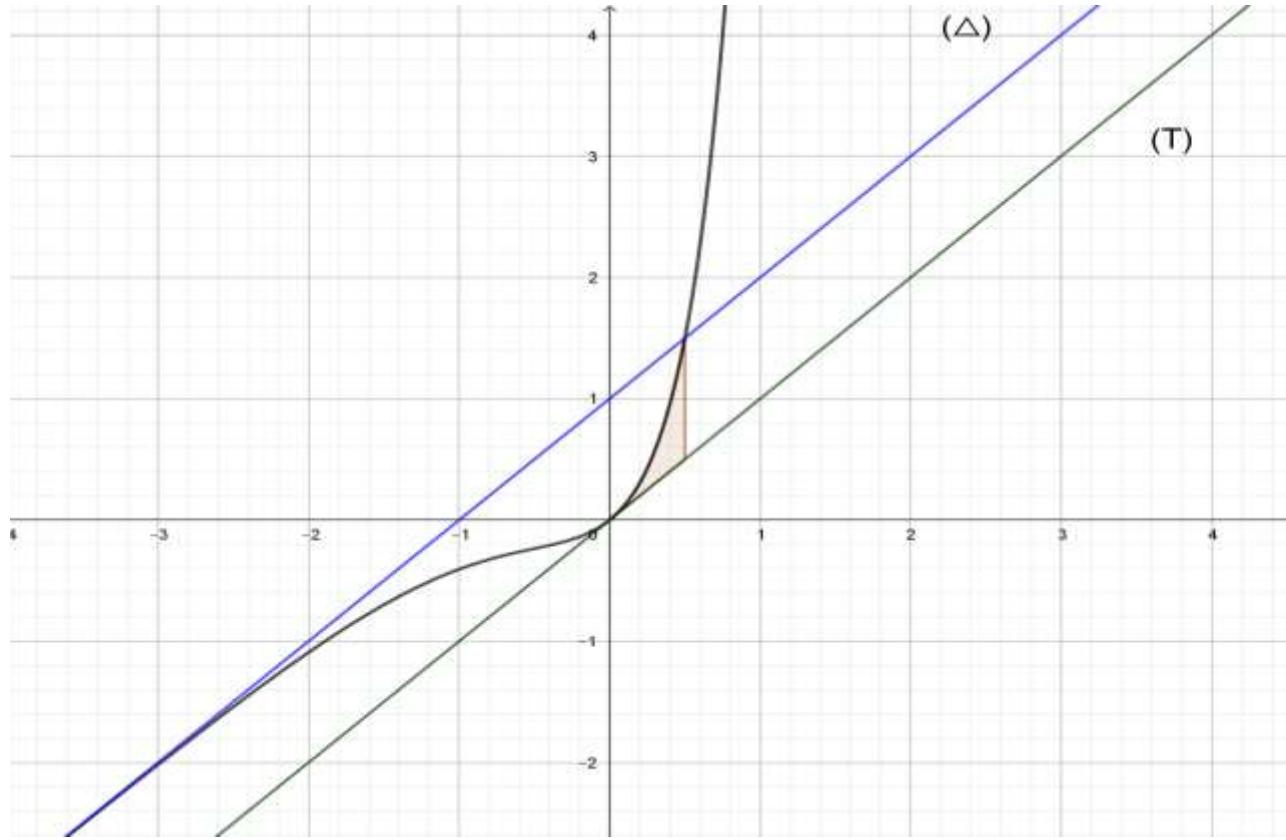
$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = \left[(x - \frac{1}{2})e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = 0 + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = \frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{e}{2}$$

$$\text{D'où } \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$$

- b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par (C), la tangente (T) à (C) et les deux droites $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ est $(6 - 2e)\text{cm}^2$.



$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - x| dx \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$$

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - x) dx \text{ cm}^2 \quad f(x) \geq x \quad \forall x \in [0; +\infty[$$

$$\text{On pose } I = \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - x) dx$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} ((2x-1)e^{2x} + x + 1 - x) dx$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} ((2x-1)e^{2x} + 1) dx \Leftrightarrow I = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx$$

$x \rightarrow (2x-1)e^{2x}$ et $x \rightarrow 1$ sont continues sur \mathbb{R} en particulier sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

$$I = 1 - \frac{e}{2} + [x]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{donc } I = \frac{3}{2} - \frac{e}{2}$$

$$\text{D'où } A = (6 - 2e) \text{ cm}^2$$