Anisse Groupe scolaire

Examen de fin du 1er semestre- Mathématiques Février 2020

2 BAC- PC- BIOF –coefficient 7- Durée : 3 h

Exercice n°1 (4,5 pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ **définie par :** $u_0 = 20$ **et** $u_{n+1} = \dfrac{20u_n}{u_n+1}$ **pour tout** n **de** IN

0.5 **1.a) Montrer par récurrence que pour tout** n **de** IN **:** $u_n > 19$

0.75 **b) Vérifier que :** $(\forall n \in IN), u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(19-u_n)}{u_n+1}$ **puis déduire la monotonie de la suite** $(u_n)_{n\geq 0}$

0.5 **c) Montrer que la suite** $(u_n)_{n\geq 0}$ **est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle** $[19, 20]$

2. On pose pour tout n **de** IN **:** $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 19}$

0.75 **a)Montrer que** $(v_n)_{n\geq 0}$ **est une suite géométrique de raison** $q = 20$ **puis exprimer** v_n **en fonction de** n

0.75 **b) Montrer que pour tout** n **de** IN **:** $u_n = \dfrac{19v_n}{v_n - 1}$ **puis déduire que** $u_n = \dfrac{19\times 20^{n+1}}{20^{n+1}-1}$

0.5 **c) Calculer** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **(justifier votre réponse)**

0.5 **3.a)Montrer que** $u_n - 19 < 10^{-25} \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(19\times 10^{25}+1)}{\ln 20} - 1$

0.25 **b) Déduire la valeur du plus petit entier naturel** n **tel que** $u_n - 19 < 10^{-25}$

Exercice n°2 (4 pts)

0.5 **1.a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes** $\mathbb{C}$ **l'équation** $(E): \dfrac{1}{4}z^2 - \sqrt{3}z + 4 = 0$

(On appelle z_1 **et** z_2 **les solutions de l'équation** (E) **tel que** $\mathrm{Im}(z_1) > 0$ **)**

0.25 **b) Ecrire sous forme trigonométrique la solution** z_1 **de** (E)

0 . 5 **c)Montrer que** z_1^{21} **est imaginaire pur**

2.Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$**,on considère les points** A **et** B **d'affixes respectives** z_A **et** z_B **telles que** $z_A = 2\sqrt{3} + 2i$ **et** $z_B = -2 + 2\sqrt{3}i$

0.5 **a)Montrer que l'écriture complexe de la rotation** R **de centre le point** B **et d'angle** $-\dfrac{\pi}{2}$ **est**

$z' = -iz - 2\left(1+\sqrt{3}\right) + 2\left(\sqrt{3}-1\right)i$

0.25 **b) Déduire que l'affixe du point** C **l'image du point** A **par la rotation** R **est** $z_c = -2\sqrt{3} - 2i$

3. Soit le point D **d'affixe** $z_D = 2\sqrt{3} - 6i$

0. 25 **a)Montrer que les points** O, B **et** D **sont alignés**

0. 5 **b) Montrer que** $\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0.75 **c)Déduire que** $AD = AC$ **et** $\left(\overline{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ **puis donner la nature du triangle** ACD

0. 5 **4. Montrer que la droite** (BD) **est la médiatrice du segement** $[AC]$

Examen de fin du 1er semestre- Mathématiques Février 2020

2 BAC- PC- BIOF –coefficient 7- Durée : 3 h

Exercice n°3 (11,5pts)

I. Soit g **la fonction numérique définie sur** $I =]0,+\infty[$ **par :** $g(x) = x^2 - x + 1 - \ln x$

0.75 **1. a)Calculer** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x)$ **et montrer que** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

0.5 **b) Montrer que** $(\forall x \in I),\ g'(x) = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{x}$

0.5 **2. a) Dresser le tableau de variations de** g **sur** I

0.25 **b) Déduire que** $(\forall x \in I),\ g(x) > 0$

II. On considère la fonction numérique f **définie sur** $I =]0,+\infty[$ **par :** $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x} - \ln x$

Soit (C_f) **la courbe représentative de** f **dans un repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.75 **1. a) Montrer que** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ **puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu**

0.75 **b) Calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **et montrer que** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

0.5 **c)Montrer que la courbe** (C_f) **admet au voisinage de** $+\infty$ **une branche parabolique de direction la droite** (Δ) **d'équation** $y = x$

0.5 **2. a)Dresser le tableau de signes de** $(1-x)\ln x$

0.5 **b) Déduire que** $(\forall x \in I),\ f(x) \le x$

1 **3. a)Montrer que :** $(\forall x \in I),\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ **puis déduire que** f **est strictement croissante sur** I

0.5 **b) Montrer que la droite** (Δ) **est la tangente à la courbe** (C_f) **au point d'abscisse** 1

0.5 **c)Montrer que l'équation** $f(x) = 0$ **admet une seule solution** α **dans** $\left]\dfrac{1}{2},1\right[$

1 **d) Construire la droite** (Δ) **et la courbe** (C_f)

0.25 **4. a-Montrer que** f **admet une fonction réciproque** f^{-1} **définie sur** IR

0.75 **b-Montrer que la fonction** f^{-1} **est dérivable en** 1 **puis calculer** $(f^{-1})'(1)$

0.5 **c-Montrer que** $f^{-1}\left(\dfrac{2019}{2020}\right) < 1$

5. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\ge 0}$ **définie par :** $u_0 = \dfrac{20}{19}$ **et** $u_{n+1} = f(u_n)$

0.5 **a) Montrer que :** $u_n > 1$ **pour tout** n **de** IN

0.5 **b) Montrer que la suite** $(u_n)_{n\ge 0}$ **est décroissante**

1 **c) Déduire que la suite** $(u_n)_{n\ge 0}$ **est convergente puis calculer sa limite**