

أمتحان نهاية الدورة الاولى

فبراير 2019

مجموعة مدارس انيس



المادة:	الرياضيات	المعامل:	7
الشعب(ة): أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية - علوم فيزيائية - خيار فرنسية	مدة الإنجاز:	3س

معلومات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة؛
- مدة إنجاز موضوع الامتحان: 3 ساعات
- عدد الصفحات: (الصفحة الأولى تتضمن معلومات والصفحتان المتبقيتان تتضمنان الموضوع)؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه؛
- في حالة عدم تمكن المترشح من الإجابة عن سؤال ما، يمكنه استعمال نتيجة هذا السؤال لمعالجة الأسئلة الموالية؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة.

معلومات خاصة

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين مستقلة فيما بينها وتوزع حسب المجالات كما يلي:

التمرين	المجال	النقطة الممنوحة
التمرين الأول	المتتاليات العددية	4نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	5نقط
التمرين الثالث	دراسة وتمثيل دالة عددية	11نقط

- بالنسبة للتمرين الثالث، $\ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

Exercice n°1 (4 pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{10u_n - 81}{u_n - 8}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 0.5 1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 9$
- 0.75 b) Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante et déduire que $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente
- 2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n - 9}$
- 0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n \geq 1$
- 0.75 b) Prouver que : $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$
- 0.75 c) Vérifier que $u_n = \frac{9v_n + 1}{v_n}$ puis déduire u_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 0.75 3) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n - 8)}{u_n - 9}$

Exercice n°2 (3 pts)

- 1 1)a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 12 = 0$
(On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation tel que $\text{Im}(z_1) > 0$)
- 0.5 b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions z_1 et z_2
- 0.5 c) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe z_1^{2019}
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $z_A = 3 + i\sqrt{3}$
- Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' , image de M par la rotation R de centre le point O et d'angle $\frac{\pi}{6}$
- 0.5 a) Donner l'écriture complexe de la rotation R
- 0.5 b) Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est $z_B = \sqrt{3} + 3i$
- 3) Soit I milieu de $[AB]$ et C le symétrique de O par rapport au point I
- 0.5 a) Montrer que : $z_C = (3 + \sqrt{3})(1 + i)$
- 1 b) Montrer que $OACB$ est un losange
- 0.5 c) Déduire une mesure de l'angle $(\widehat{CI, CA})$

Exercice n°3 (11 pts)

I. Soit g la fonction numérique définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2} \ln x - 1$

0.5 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

0.5 b) Calculer $g'(x)$ puis déduire que g est strictement décroissante sur I

0.75 2) Calculer $g(1)$ puis déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$

0.5 3) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie un intervalle J que l'on déterminera

0.5 b) Calculer $(g^{-1})'(0)$

II. On considère la fonction numérique f définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} - \frac{1}{2} \ln x$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0.5 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu

0.75 b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

0.5 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ puis déduire que (C_f) admet une branche parabolique dont on déterminera la direction

0.5 2) a) Montrer que : $f(x) - x = g(x)$ pour tout x de I .

0.5 b) Déduire que $f(x) < x$ pour tout x de $]1, +\infty[$

1 3) a) Montrer que f est dérivable sur I et que $f'(x) = \frac{(x-1)(2x^2 + 5x + 1)}{2x(x+1)^2}$ pour tout x de I .

0.5 b) Dresser le tableau de variations de f sur I

1 c) Construire, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite (Δ) d'équation $y = x$ et la courbe (C_f)

1 d) Montrer que l'équation $(x+1) \ln \sqrt{x} = x^2 - 2019x - 2018$ admet une seule solution sur $]1, +\infty[$

III. On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

0.5 1) a) Montrer que : $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 b) Etudier la monotonie de (u_n) puis déduire que $u_n \in]1, 2]$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 2) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite