

التعداد Dénombrement

I- مبدأ الجداء

تمهيد :

(1) رمى قطعة نقدية :

(a) إذا رمينا قطعة نقدية فاننا نحصل اما على الوجه F أو على الظهر P . P=pile , F=Face في هذه الحالة نقول أن لنا امكائيتين .

(b) و إذا رمينا القطعة النقدية مرتين فما هو عدد المكائيات الممكن الحصول عليها :

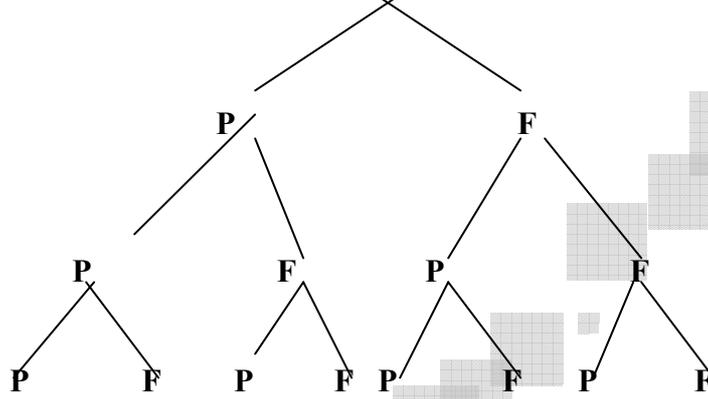
FF ; FP ; PF ; PP

(c) و إذا رمينا القطعة النقدية ثلاث مرات فما هو عدد الامكائيات الممكن الحصول عليها:

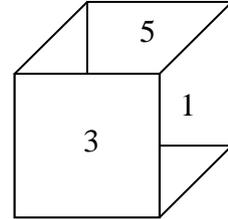
PPP ; PPF ; PFP ; FPP

FFP ; FPF ; PFF ; FFF

يمكن استعمال الشجرة " شجرة الامكائيات " على النحو التالي :



(2) رمى النرد:



النرد هو مكعب عادة تكون وجوهه الستة مرقمة من 1 الى 6 .

(a) إذا رمينا هذا النرد مرة واحدة و نسجل الرقم المحصل عليه بعد كل رمية فما هي النتائج الممكن

المحصل عليها . الجواب : 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 .

لدينا إذا ستة إمكائيات .

(b) إذا قمنا برمي النرد مرتين و كنا نسجل الرقم المحصل عليه بعد كل رمية فما هي مجموعة جميع الامكائيات

المتوقعة ؟

الجواب : { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), } . يمكن إعطاء جدول للنتائج.

(c) تظنن عدد جميع الإمكائيات إذا قمنا برمي النرد ثلاث مرات متتالية .

(3) تكوين أعداد

(a) لدينا 6 بيدقات تحمل الأرقام : 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6

(a₁) ما هو عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام و الممكن تكوينها بواسطة البيدقات .

(a₂) ما هو عدد الأعداد المكونة من ستة أرقام و الممكن تكوينها بواسطة البيدقات .

(b) ما هو عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام .

ملاحظة : لعدد oxy يعتبر عدد مكون من رقمين فقط .

خلاصة : مبدأ الجداء

نعتبر p اختبار

إذا كان : الاختبار الأول يتم ب n_1 كيفية مختلفة

الاختبار الثاني يتم ب n_2 كيفية مختلفة

الاختبار p يتم ب n_p كيفية مختلفة

فإن عدد الكيفيات التي تم بها هذا الاختبار هو : $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$

تطبيقات:

- 1- صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء
 - (a) نسحب من الصندوق 3 كرات واحدة تلو الأخرى و لا نعيد الكرة المسحوبة الى الصندوق
 - (a₁) أعط عدد جميع السحبات الممكنة
 - (a₂) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات بيضاء.
 - (a₃) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات سوداء.
 - (a₄) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات لها نفس اللون.
 - (b) نفس الأسئلة علما أننا نعيد الكرة المسحوب إلى الصندوق قبل سحب الأخرى وهكذا.
- 2- كيس يحتوي على 5 بيدات تحمل الأرقام 0 - 1 - 2 - 3 - 4 . نسحب بيدقتين بالتتابع.
 - إذا كانت البيدقة الأولى تحمل رقما فرديا نعيدها إلى الكيس ثم نسحب الثانية
 - و إذا كانت البيدقة الأولى تحمل رقما زوجيا لا نعيدها إلى الكيس ثم نسحب الثانية
 - (a) ما هو عدد جميع الإمكانيات
 - (b) ما هو عدد إمكانيات الحصول على بيدقتين يحملن رقما فرديا
 - (c) ما هو عدد إمكانيات الحصول على بيدقتين يحملن رقما زوجي

II- الترتيبات : Les arrangements

تمهيد :

- 1- في قاعة انتظار إحدى العيادات يوجد 10 كراسي و 3 مرضى . بكم من طريقة يمكن للمرضى الثلاث أن يجلسوا.
- 2- أربعة أطفال دخلوا إلى قاعة للمطالعة فوجدوا 5 طاولات. بكم من طريقة يمكن للأطفال أن يجلسوا (كل طاولة لا تسع إلا لطفل على الأكثر)
- 3- قسم يحتوي على 42 تلميذ . بكم من طريقة يمكن اختيار ثلاث تلاميذ واحد تلو الآخر من هذا القسم .

تعريف:

كل ترتيب ل p عنصر من بين n عنصر ($p \leq n$) يسمى يسمى ترتيبه ل p عنصر من بين n

عدد الترتيبات :

تمهيد :

مجموعة تتكون من n عنصر .
 نريد اختيار p عنصر من بين n بالتتابع
 لاختيار العنصر الأول لدينا n طريقة
 و لاختيار العنصر الثاني لدينا $(n-1)$ طريقة
 و لاختيار العنصر p^{th} لدينا $(n-p+1)$ طريقة.
 وحسب مبدأ الجداء لدينا : $n(n-1) \dots (n-p+1)$ طريقة مختلفة لاختيار p عنصر من بين n .

مبرهنة :

عدد الترتيبات ل p عنصر من بين n $p \leq n$ هو $n(n-1) \dots (n-p+1)$ و نرمز له ب A_n^p

$$A_5^3 = n(n-1) \dots (n-p+1)$$

مثال : A_5^1 , A_6^2 , A_5^3

تعريف :

كل ترتيبية ل n عنصر من بين n تسمى تبديلة ل n عنصر
عدد التباديل :

عدد التباديل ل n عنصر هو العدد A_n^n

$$n(n-1)\dots\dots\dots\times 2\times 1$$

و نرمل له ب: $n!$. و نقرأ n عاملي أو n factoriel .

$$n! = n(n-1)\dots\dots\dots\times 2\times 1$$

اصطلاح : $0! = 1$

مثال : $63! =$ $5! = 120$

ملاحظة هامة :

$$A_n^p = n(n-1)\dots\dots\dots(n-p+1)$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_n^p = n(n-1)\dots\dots\dots(n-p+1)$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

VI- التاليفات : Les combinaisons

تمهيد :

1- نعتبر المجموعة : $E = \{a, b, c, d\}$

جدد جميع أجزاء E

2- نريد اختيار شخصين ثانيا من بين 5 أشخاص
ما هو عدد الطرق لإجراء هذا الاختبار.

تعريف :

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر

كل جزء من E مكون من P عنصر ($p \leq n$) يسمى تاليفة ل p عنصر من بين n

عدد التاليفات :

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر و ($p \leq n$)

إذا أردنا اختيار p عنصر بالتتابع و بدون إحلال من E فإن عدد جميع الإمكانيات هو A_n^p :

و ليكن N هو عدد التاليفات ل p عنصر من بين n

نلاحظ أنه بالنسبة للتاليفات الترتيب غير مهم

اذن لكل تاليفة ل p عنصر من بين n هناك $p!$ ترتيبية ل p عنصر من بين n و منه :

$$A_n^p = p!N \quad \text{أي} \quad N = \frac{A_n^p}{p!}$$

عدد التاليفات ل p عنصر من بين n ($p \leq n$) هو العدد $\frac{A_n^p}{p!}$ و الذي نرمز له ب : C_n^p

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

تطبيقات:

1- أحسب : C_n^0 , C_n^1 , C_3^1 , C_4^2

2- بين أن : $C_n^{n-p} = C_n^p$

3- بين أن : $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$, $1 \leq p \leq n$

4- مثلث باسكال

5- صيغة الجداينية : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$

أمثلة : (1) أحسب : $(n+1)^5$

(2) بين أن : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

استنتج عدد أجزاء مجموعة تحتوي على n عنصر

خاصية : عدد أجزاء مجموعة تحتوي على n عنصر هو 2^n

$$\text{card}P(E) = 2^{\text{card}E}$$