

المعادلات التفاضلية

I- تقديم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة و تحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.
هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.
يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز y (وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل $u, z, f, \dots$)
حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هذه المعادلة , و مجموعة هذه الدوال تسمى الحل العام للمعادلة , كل عنصر من هذه المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة , كل حل يسمى كذلك تكاملا.

2- أمثلة

أ) $y' = 0$ هي معادلة تفاضلية
الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $y(x) = 1$ حل خاص للمعادلة
مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$ هي الحل العام للمعادلة $y' = 0$.
ب) $y' = x^2 - 1$ هي معادلة تفاضلية ذات المجهول y (يمكن أن نكتب $y'(x) = x^2 - 1$)
حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة $x \rightarrow x^2 - 1$ على $\mathbb{R}$.
أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x \rightarrow \frac{1}{3}x^3 - x + k$
حيث k عدد حقيقي اعتباطي .

II - حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

1/ المعادلة التفاضلية $y' = ay$

* إذا كان $a = 0$ فإن $y' = 0$ أي أن الحل العام هو مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$
* إذا كان $a \neq 0$
نعلم أن $(e^{ax})' = ae^{ax}$ و $\forall x \in \mathbb{R}$ اذن $x \rightarrow e^{ax}$ حل خاص للمعادلة $y' - ay = 0$
ليكن y حلا اعتباطيا للمعادلة $y' - ay = 0$ نضع $y(x) = z(x)e^{ax}$
ومنه $y'(x) = z'(x)e^{ax} + az(x)e^{ax}$
أي $y'(x) = z'(x)e^{ax} + ay(x)$ و بالتالي $y'(x) - ay(x) = z'(x)e^{ax} = 0$
و منه $z'(x) = 0$ و بالتالي $z(x) = \lambda$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي
اذن $y(x) = \lambda e^{ax}$ حيث $\forall x \in \mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي
نلاحظ أن الحالة $a = 0$ هي ضمن الحالة العامة .

خاصة

المعادلة التفاضلية $y' = ay$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x \rightarrow \lambda e^{ax}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y' = ay$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ و هي الدالة $x \rightarrow y_0 e^{a(x-x_0)}$
الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي

أمثلة

1- نحل المعادلة التفاضلية $y' = 2y$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = 2y$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x \rightarrow \lambda e^{2x}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

2- نحل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{3}y$; $y(1) = 2$

حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{3}y$; $y(1) = 2$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x \rightarrow 2e^{\frac{1}{3}(x-1)}$

2/ حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

إذا كان $a = 0$ فإن $y' = b$ ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال f حيث $f(x) = bx + c$

إذا كان $a \neq 0$ فإن $y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$

نضع $z = y + \frac{b}{a}$ ومنه $z' = y'$

وبالتالي $y' = ay + b \Leftrightarrow z' = az \Leftrightarrow z(x) = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \quad / \lambda \in \mathbb{R}$

خاصة

ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $a \neq 0$
المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ تقبل ما لانهاية من الحلول وهي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x \rightarrow \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y' = ay + b$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ وهي الدالة $x \rightarrow \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$
الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي

مثال

نحل المعادلة التفاضلية $y' = -3y + 2$
حلول المعادلة التفاضلية $y' = -3y + 2$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x \rightarrow \lambda e^{-3x} + \frac{2}{3}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

III- حل المعادلات التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$

1- المعادلات التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$ حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة

الثانية ذات المعاملات الثابتة

2- بعض الحالات الخاصة

*- إذا كان $a = b = 0$ فإن $y'' = 0$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad y'(x) = k \Leftrightarrow \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2 \quad y(x) = kx + k'$$

الحل العام للمعادلة $y'' = 0$ هي مجموعة الدوال $x \rightarrow kx + k'$ بحيث $(k; k') \in \mathbb{R}^2$

*- إذا كان $b = 0$ فإن $y'' + ay' = 0$

$$z' + az = 0 \quad \text{ومنه } y' \quad y'' + ay' = 0 \Leftrightarrow (y')' + ay' = 0$$

وبالتالي $y'(x) = \lambda e^{-ax}$ بحيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن الحل العام للمعادلة $y'' + ay' = 0$ هي الدوال الأصلية $x \rightarrow \lambda e^{-ax}$

$$\text{أي الدوال} \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad x \rightarrow \frac{-\lambda}{a} e^{-ax} + \mu$$

3- حل المعادلة التفاضلية $E: y'' + ay' + by = 0$; $(a; b) \neq (0; 0)$

لنبحث عن حلول من نوع $r \in \mathbb{R}; \quad y: x \rightarrow e^{rx}$

$$y \text{ حل للمعادلة } E \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0 \Leftrightarrow r^2 e^x + a r e^x + b e^x = 0$$

اذن إذا كان r حل للمعادلة $r^2 + ar + b = 0$ فإن الدالة $x \rightarrow e^{rx}$ حل للمعادلة E

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $E: y'' + ay' + by = 0$; $(a; b) \in \mathbb{R}^2$
مميز هذه المعادلة هو $a^2 - 4b$

نشاط

1- أ/ حل المميزة للمعادلة $y'' + 3y' - 4y = 0$: (E_1) واستنتج حلين للمعادلة (E_1)

ب/ بين ان الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x \rightarrow \alpha e^x + \beta e^{-4x}$ حل للمعادلة التفاضلية (E_1) حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

2- أ/ حل المميزة للمعادلة $y'' - 6y' + 9y = 0$: (E_2)

ب/ بين ان الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x \rightarrow (\alpha + \beta x)e^{3x}$ حل للمعادلة التفاضلية (E_1) حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

3- أ/ حل المميزة للمعادلة $y'' + 4y' + 13y = 0$ (E_3):

ب/ بين ان الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $f: x \rightarrow e^{-2x} \cos 3x$ و $g: x \rightarrow e^{-2x} \sin 3x$ حلين للمعادلة التفاضلية (E_3)

ج/ بين ان الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x \rightarrow \alpha f + \beta g$ حل للمعادلة التفاضلية (E_1) حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

خاصة

لتكن المعادلة التفاضلية E: $y'' + ay' + by = 0$; $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ و لتكن $r^2 + ar + b = 0$ المعادلة المميزة

*- اذا كان $a^2 - 4b > 0$ فان المعادلة المميزة لها جذرين مختلفين r_1 ; r_2 و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \rightarrow \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b = 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج r . و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \rightarrow (\alpha + \beta x)e^{rx}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان المعادلة المميزة تقبل جذرين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$ و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \rightarrow e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$ حيث α و β عدنان اعتباطيان.

الحل الذي يحقق $y'(x_0) = y'_0$; $y(x_0) = y_0$

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يحقق الشرطين $y'(x_0) = y'_0$; $y(x_0) = y_0$

الشرطان $y'(x_0) = y'_0$; $y(x_0) = y_0$ يسميان الشرطين البدئيين .

يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

ملاحظة

لدينا $\alpha \cos qx + \beta \sin qx = k \left(\frac{\alpha}{k} \cos qx + \frac{\beta}{k} \sin qx \right) = k (\cos \varphi \cos qx + \sin \varphi \sin qx) = k \cos(qx - \varphi)$

بوضع $\cos \varphi = \frac{\alpha}{k}$; $\sin \varphi = \frac{\beta}{k}$; $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

تستنتج اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان $x \rightarrow ke^{px} \cos(qx - \varphi)$ حيث k و φ اعتباطيان

تمرين 1- حل المعادلة $y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$ و حدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0) = 1$; $y_1'(0) = -1$

2- حل المعادلة $y'' + 4y' + 4y = 0$

3- حل المعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$

حالات خاصة

*- اذا كان $a > 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي

$x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{a}x + \beta \sin \sqrt{a}x$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

*- اذا كان $a < 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي

$x \rightarrow \alpha e^{\sqrt{-a}x} + \beta e^{-\sqrt{-a}x}$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

مثال حل المعادلتين $y'' + 2y = 0$; $y'' - 4y = 0$

حلول المعادلة $y'' + 2y = 0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

حلول المعادلة $y'' - 4y = 0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \rightarrow \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.