

01. ندرس اشتقاق الدالة f في $x_0 = 1$ ثم في $x_0 = 0$ مع $x \neq 1$ $f(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$, $f(1) = 1$

• ندرس اشتقاق الدالة f في $x_0 = 1$.

- اشتقاق الدالة f على يمين $x_0 = 1$.
لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1} - (x - 1)}{(x - 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x\sqrt{(x - 1)^2} - (x - 1)}{(x - 1)^2} ; (|x| = x ; x \rightarrow 1^+) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x|x - 1| - (x - 1)}{(x - 1)^2} ; \left(\sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1| \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x - 1) - (x - 1)}{(x - 1)^2} ; (|x - 1| = x - 1 ; x \rightarrow 1^+) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)[x - 1]}{(x - 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 \in \mathbb{R}$

خلاصة (1) : الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 1$ و $f'_d(1) = 1$

- اشتقاق الدالة f على يسار $x_0 = 1$.
لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1} - (x - 1)}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{(x-1)^2} - (x-1)}{(x-1)^2} ; (|x| = x ; x \rightarrow 1^-) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x|x-1| - (x-1)}{(x-1)^2} ; \left(\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(x-1) - (x-1)}{(x-1)^2} ; (|x-1| = -(x-1) ; x \rightarrow 1^-) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(-x-1)}{(x-1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x-1}{x-1} ; \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} x-1 = 0^- ; \lim_{x \rightarrow 1^-} -x-1 = -2 \right) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = +\infty \notin \mathbb{R}$

خلاصة (2) : الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار $x_0 = 1$

خلاصة : الدالة f غير قابلة للاشتقاق في $x_0 = 1$

• ندرس اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$

- اشتقاق الدالة f على يمين $x_0 = 0$ لدينا :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1} - 0}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}\sqrt{(x-1)^2}}{\cancel{x}(x-1)} ; (|x| = x ; x \rightarrow 0^+) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x-1|}{x-1} ; \left(\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(x-1)}{x-1} ; (|x-1| = -(x-1) ; x \rightarrow 0^+) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = -1 \in \mathbb{R}$

خلاصة (1) : الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$ و $f'_d(0) = -1$

- اشتقاق الدالة f على يسار $x_0 = 0$.
لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\cancel{x} \sqrt{(x-1)^2}}{\cancel{x} (x-1)} ; \quad (|x| = -x ; x \rightarrow 0^-) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-|x-1|}{x-1} ; \quad \left(\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-(-(x-1))}{x-1} ; \quad (|x-1| = -(x-1) ; x \rightarrow 0^-) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \in \mathbb{R}$

خلاصة (2) : الدالة f قابلة للاشتقاق على يسار $x_0 = 0$ و $f'_g(0) = 1$

خلاصة : الدالة f غير قابلة للاشتقاق في $x_0 = 1$ لأن $f'_g(0) \neq f'_d(0)$

02.

لنعتبر $\mathbb{R} \rightarrow [-1; 1] \setminus \{0\} : f$ الدالة المعرفة ب: $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

01. نحدد g التمديد بالاتصال في $x_0 = 0$ للدالة f .
لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 &= 1 \quad ; \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x} = 1 \right) \\
 &\quad \text{و منه : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

خلاصة : الدالة f تقبل تمديد بالاتصال في النقطة $x_0 = 0$ هي الدالة g المعرفة ب :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & ; \quad [-1;1] \setminus \{0\} \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

أو أيضا :

الدالة f تقبل تمديد بالاتصال في النقطة $x_0 = 0$ هي الدالة h المعرفة ب :

$$h(x) = \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} ; \quad [-1;1]$$

02. هل g قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ ؟

طريقة 1 :

$$h(x) = \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} ; \quad [-1;1]$$

لدينا :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x} + 1 - \sqrt{1-x}}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \quad ; \quad (2 = 1+1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \sqrt{1+x}}{x} + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \right] \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1 - \sqrt{1+x})(1 + \sqrt{1+x})}{x(1 + \sqrt{1+x})} + \frac{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})}{x(1 + \sqrt{1-x})} \right] \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1-1-x}{x(1+\sqrt{1+x})} + \frac{1-1+x}{x(1+\sqrt{1-x})} \right] \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R} \text{ و منه :}$$

خلاصة : الدالة h قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و العدد المشتق في $x_0 = 0$ هو $h'(0) = 0$.

طريقة 2 : اقترحنا التلميذة مباسو احسان

$$\begin{cases} g(x) = f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} ; & [-1;1] \setminus \{0\} \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (x + \sqrt{1-x})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - (x + \sqrt{1-x}))(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))}{x^2(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-x^2-2x\sqrt{1-x}-1+x}{x^2(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} ; \left((x + \sqrt{1-x})^2 = x^2 + 2x\sqrt{1-x} + 1-x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-x^2-2x\sqrt{1-x}}{x^2(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2-x-2\sqrt{1-x})}{x^2(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x-2\sqrt{1-x})}{x} \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((2-x)-2\sqrt{1-x})(2-x+2\sqrt{1-x})}{x((2-x)+2\sqrt{1-x})} \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4x + x^2 - 4(1-x)}{x((2-x) + 2\sqrt{1-x})} \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x((2-x) + 2\sqrt{1-x})} \times \frac{1}{(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{((2-x) + 2\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x}))} \\
 &= 0 \quad ; \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} ((2-x) + 2\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + (x + \sqrt{1-x})) = 4 \times 2 = 8 \right) \\
 &\quad \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R} \quad \text{و منه :}
 \end{aligned}$$

خلاصة : الدالة g قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و العدد المشتق في $x_0 = 0$ هو $g'(0) = 0$.

.03

لنعتبر $f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ الدالة المعرفة ب: $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

.01 هل f قابلة للاشتقاق على $]0;1[$ ؟

لدينا الدالة : $x \mapsto x(1-x)$ قابلة للاشتقاق و موجبة قطعاً على $]0;1[$ ومنه الدالة $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ قابلة للاشتقاق على $]0;1[$

.02 ندرس قابلية للاشتقاق f على يمين $x_0 = 0$ ؟ أعط تأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها.

ندرس اشتقاق f على يمين $x_0 = 0$

لدينا :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x(1-x)} - 0}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x(1-x)} \times \sqrt{x(1-x)}}{x\sqrt{x(1-x)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}(1-x)}{\cancel{x}\sqrt{x(1-x)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-x)}{\sqrt{x(1-x)}} \\
 &= +\infty \quad ; \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} 1-x = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x(1-x)} = 0^+ \right) \\
 &\quad \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \notin \mathbb{R} \quad \text{و منه :}
 \end{aligned}$$

خلاصة: الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$

تأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها منحنى الدالة f يقل نصف مماس على يمين $x_0 = 0$ موازي لمحور الأرتايب .

03. هل f قابلة للاشتقاق على يسار $x_0 = 1$ ؟

ندرس اشتقاق f على يسار $x_0 = 1$

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x(1-x)} - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x(1-x)} \times \sqrt{x(1-x)}}{(x-1)\sqrt{x(1-x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(1-x)}{(x-1)\sqrt{x(1-x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x(1-x)}} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$; \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x(1-x)} = 0^+ \right)$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \notin \mathbb{R} \text{ ومنه :}$$

خلاصة: الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار $x_0 = 1$

.04

.01. أحسب $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f لكل حالة من الحالات التالية .

لدينا :

$$f'(x) = \left[\frac{3x-5}{2-x} \right]' = \left[\frac{3x-5}{-x+2} \right]' = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times \frac{1}{(-x+2)^2} = \frac{6-5}{(-x+2)^2} = \frac{1}{(-x+2)^2} \cdot$$

$$f'(x) = \left[\frac{x^2+16}{x+4} \right]' = \frac{(x^2+16)'(x+4) - (x^2+16)(x+4)'}{(x+4)^2} = \frac{2x(x+4) - (x^2+16) \times 1}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x-16}{(x+4)^2} \cdot$$

$$\cdot f'(x) = \left[\sqrt{x^2-5x+6} \right]' = \left[\frac{x^2-5x+6}{2\sqrt{x^2-5x+6}} \right]' = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left[x^3 \sqrt{4x+1} \right]' = (x^3)' \times \sqrt{4x+1} + x^3 \times \left[\sqrt{4x+1} \right]' = 3x^2 \sqrt{4x+1} + x^3 \times \frac{(4x+1)'}{2 \times \sqrt{4x+1}} \\ &= 3x^2 \sqrt{4x+1} + \frac{4x^3}{2 \times \sqrt{4x+1}}\end{aligned}$$

$$f'(x) = \left[(5x+1)^4 \right]' = 4(5x+1)' \times (5x+1)^3 = 4 \times 5 \times (5x+1)^3 = 20(5x+1)^3 \quad \bullet$$

$$f'(x) = \left[\sqrt{\frac{3x-5}{2-x}} \right]' = \left[\frac{3x-5}{2-x} \right]' \times \frac{1}{2 \times \sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times \frac{1}{(-x+2)^2} \times \frac{1}{2 \times \sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}} \\ = 1 \times \frac{1}{(-x+2)^2} \times \frac{1}{2 \times \sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}} = \frac{1}{2(-x+2)^2 \times \sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}}$$

$$f'(x) = \left[\frac{x+2}{\sqrt{x+7}} \right]' = \frac{(x+2)' \sqrt{x+7} - (x+2)(\sqrt{x+7})'}{\sqrt{x+7}^2} = \frac{1 \times \sqrt{x+7} - (x+2) \frac{(x+7)'}{2 \times \sqrt{x+7}}}{\sqrt{x+7}^2} \\ = \frac{2(x+7) - (x+2)}{2(x+7) \times \sqrt{x+7}} = \frac{x+12}{2(x+7) \times \sqrt{x+7}}$$

$$f'(x) = \left[\frac{x+2}{\sqrt{x+8}} \right]' = \frac{(x+2)'(\sqrt{x+8}) - (x+2)(\sqrt{x+8})'}{(\sqrt{x+8})^2} = \frac{1 \times (\sqrt{x+8}) - (x+2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x+8})^2} \\ = \frac{2x+16\sqrt{x} - x - 2}{2\sqrt{x} \times (\sqrt{x+8})^2} = \frac{x+16\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x} \times (\sqrt{x+8})^2}$$

$$f'(x) = \left[\frac{x+2}{3-x} \sqrt{x^2+1} \right]' = \left[\frac{x+2}{3-x} \right]' \times \sqrt{x^2+1} + \left[\frac{x+2}{3-x} \right] \times [\sqrt{x^2+1}]' \\ = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times \frac{1}{(-x+2)^2} \times \sqrt{x^2+1} + \frac{x+2}{3-x} \times [\sqrt{x^2+1}]' \\ = \frac{1}{(-x+2)^2} \times \sqrt{x^2+1} + \frac{x+2}{3-x} \times \frac{[x^2+1]'}{2 \times [\sqrt{x^2+1}]} = \frac{1}{(-x+2)^2} \times \sqrt{x^2+1} + \frac{x+2}{3-x} \times \frac{x}{[\sqrt{x^2+1}]}$$

$$\left[\frac{ag(x)+b}{cg(x)+d} \right]' = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \times \frac{1}{(cg(x)+d)^2} \times g'(x) \quad \text{ملحوظة:}$$

$$f'(x) = \left[\frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+8}} \right]' = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \times \frac{1}{(\sqrt{x+8})^2} \times (\sqrt{x})' = \frac{22}{(\sqrt{x+8})^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{11}{(\sqrt{x+8})^2 \times \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \left[\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right]' = (\sqrt{x^2+1})' - (\sqrt{x^2+1})' \times \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{(x^2+1)'}{2 \times \sqrt{x^2+1}} - \frac{(x^2+1)'}{2 \times \sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= \frac{2x}{2 \times \sqrt{x^2+1}} - \frac{2x}{2 \times \sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{x(x^2+1)-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^3}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = [x^2 + 3\sin x]' = 2x + 3\cos x \quad \bullet$$

$$f'(x) = [\sqrt{x} + 7\cos x]' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 7\sin x \quad \bullet$$

$$f'(x) = [\sin(4x) + \cos(7x+1)]' = 4\cos(4x) - 7\sin(7x+1) \quad \bullet$$

$$f'(x) = \left[\frac{1}{x} + \tan x \right]' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{-\cos^2 x + x^2}{x^2 \cos^2 x} ; \left((\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \right) \quad \bullet$$

$$f'(x) = \left[\frac{3}{\sin x} \right]' = -3 \times \frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{-3\cos x}{\sin^2 x} \quad \bullet$$

$$f'(x) = [\sqrt[7]{x}]' = \left[x^{\frac{1}{7}} \right]' = \frac{1}{7} \times x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{1}{7} \times x^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7} \times \sqrt[7]{x^{-6}} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{\sqrt[7]{x^6}} \quad \bullet$$

$$f'(x) = [\sqrt[5]{x^7}]' = \left[x^{\frac{7}{5}} \right]' = \frac{7}{5} \times x^{\frac{7}{5}-1} = \frac{7}{5} \times x^{\frac{2}{5}} = \frac{7}{5} \times \sqrt[5]{x^2} \quad \bullet$$

$$f'(x) = [\sqrt[6]{x^2+2x-3}]' = \left[(x^2+2x-3)^{\frac{1}{6}} \right]' = \frac{1}{6} \times (x^2+2x-3)' \times (x^2+2x-3)^{\frac{1}{6}-1} \\ = \frac{1}{6} \times (2x+2) \times (x^2+2x-3)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{3} \times \frac{x+1}{\sqrt[6]{(x^2+2x-3)^5}} \quad \bullet$$

$$f'(x) = \left[(x^2+2x-3)^{\frac{2}{5}} \right]' = \frac{2}{5} \times (x^2+2x-3)' \times (x^2+2x-3)^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5} \times (2x+2) \times (x^2+2x-3)^{-\frac{3}{5}} \\ = \frac{2}{5} \times (2x+2) \times (x^2+2x-3)^{-\frac{3}{5}} = \frac{4x+4}{5 \times \sqrt[5]{(x^2+2x-3)^3}} \quad \bullet$$

05.

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = \sqrt[6]{x^2+2x-3} = \sqrt[6]{(x-1)(x+3)}$

01. نحدد مجموعة تعريف الدالة f .

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x-1)(x+3) \geq 0$$

لدينا :

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$

02. نحسب f' على $] -\infty, -3[\cup] 1, +\infty[$.

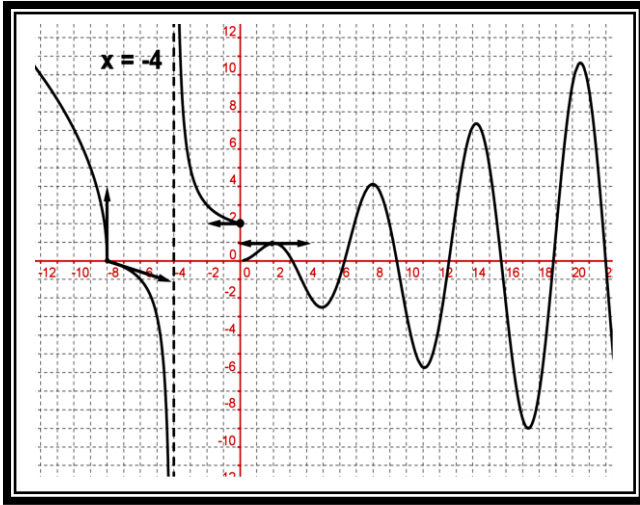
لدينا :

$$f'(x) = \left[\sqrt[6]{x^2 + 2x - 3} \right]' = \left[(x^2 + 2x - 3)^{\frac{1}{6}} \right]' = \frac{1}{6} (x^2 + 2x - 3)' \times (x^2 + 2x - 3)^{\frac{1}{6} - 1}$$

$$= \frac{1}{6} (2x + 2) \times (x^2 + 2x - 3)^{-\frac{5}{6}} = \frac{x + 1}{3 \times \sqrt[6]{(x^2 + 2x - 3)^5}}$$

خلاصة :

$$f'(x) = \frac{x + 1}{3 \times \sqrt[6]{(x^2 + 2x - 3)^5}}$$



06.

الشكل الآتي يمثل منحنى دالة f في المستوى (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

01. استنتج مبيانيا النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

مبيانيا لدينا :

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

أما عند $+\infty$ الدالة f ليس لها نهاية.

02. أ- ندرس مبيانيا اتصال الدالة f على يمين 0 : الدالة f غير متصلة على يمين 0 (لأن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ و $f(0) = 2$)

ب- أدرس مبيانيا اتصال الدالة f على يسار 0 . الدالة f متصلة على يسار 0 (لأن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0)$ و $f(0) = 2$)

ج- هل f متصلة في 0 ؟ f غير متصلة في 0 .

03. أ- هل f قابلة للاشتقاق في -8 ؟ f غير قابلة للاشتقاق في -8 (هناك نقطة مزواة)

ب- ما هو العدد المشتق على يسار 0 . العدد المشتق على يسار 0 هو $f'(0) = 0$ (لأن نصف المماس على يسار 0 موازي لمحور

الأفصيل)

ج- أعط معادلة المماس في 2 . لدينا : معادلة المماس في 0 هي $y = 1$ (يمكنك استعمال $f(0) = 1$ و $f'(0) = 0$)

07.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 4} & ; x \geq 0 \\ f(x) = 3x^2 + 2; & x < 0 \end{cases}$$

01. أ- نحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

لدينا :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty$; $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 4 = +\infty \right)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 = +\infty$$

ب - ندرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 0$. $f(0) = 2$

اتصال الدالة f على يمين النقطة $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 4} = 2 = f(0) ; \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 4 = 4 \right)$$

ومنه : الدالة f متصلة على يمين النقطة $x_0 = 0$.

اتصال الدالة f على يسار النقطة $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 + 2 = 2 = f(0) ; \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 + 2 = 2 \right)$$

ومنه : الدالة f متصلة على يسار النقطة $x_0 = 0$.

خلاصة : الدالة f متصلة على النقطة $x_0 = 0$.

02. أ - أدرس اشتقاق الدالة f على يسار النقطة $x_0 = 0$ ؛ ثم أعط تأويلا هندسيا لنتيجة المحصل عليها.

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + 2 - 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R} \text{ : ومنه :}$$

خلاصة : الدالة f قابلة للاشتقاق على يسار النقطة $x_0 = 0$ و $f'_g(0) = 0$

تأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يسار $x_0 = 0$ موازي لمحور الأفاصيل .

ب - ندرس اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $x_0 = 0$.

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{x(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4 - 4}{x(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4} + 2}$$

$$= 0 \quad ; \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 4} + 2; \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R} \quad \text{ومنه :}$$

خلاصة : الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين النقطة $x_0 = 0$ و $f'_d(0) = 0$

ج - هل الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0 = 0$.

نعم الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0 = 0$ لأن f قابلة للاشتقاق على يمين و يسار $x_0 = 0$ و $f'_d(0) = f'_g(0)$

03. أ - أحسب الدالة المشتقة f' ل f على المجال $]0 + \infty[$ ثم حدد إشارتها على $]0 + \infty[$.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \quad \text{ومنه :} \quad f'(x) = \left[\sqrt{x^2 + 4} \right]' = \frac{(x^2 + 4)'}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} > 0 \quad \text{لدينا :} \quad]0 + \infty[\text{ على المجال}$$

ب - أحسب الدالة المشتقة f' ل f على المجال $] -\infty, 0[$ ثم حدد إشارتها على $] -\infty, 0[$.

$$f'(x) = 6x \quad \text{ومنه :} \quad f'(x) = [3x^2 + 2]' = 6x$$

$$f'(x) = 6x < 0 \quad \text{لدينا :} \quad] -\infty, 0[\text{ على المجال}$$

ج - نعطي جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$ هو كالتالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

04. أ أعط معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة $x_1 = 2$.

ومنه :

$$y = (x - x_0)f'(x_0) - f(x_0) \quad (x_0 = 2) \quad \text{مع} \quad f(2) = 2\sqrt{2}$$

$$f'(2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = (x - 2)f'(2) - f(2) = (x - 2)\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} \quad \text{ومنه :}$$

خلاصة : معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة $x_1 = 2$ هي : $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$

05. أ- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty, 0]$. بين أن: g تقبل دالة عكسية g^{-1} من J إلى I مع تحديد J .
لدينا: الدالة f متصلة و تناقصية قطعاً على $I =]-\infty, 0]$ إذن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty, 0]$ فهي متصلة و تناقصية قطعاً على $I =]-\infty, 0]$.

ومنه: g تقبل دالة عكسية g^{-1} من J إلى I تحديد J : لدينا: $J = g(I) = g(]-\infty, 0]) = [2; +\infty[$ و بالتالي: $J = [2; +\infty[$

خلاصة: g تقبل دالة عكسية g^{-1} من $J = [2; +\infty[$ إلى $I =]-\infty, 0]$.

ب- نحدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

ليكن: $x \in I =]-\infty, 0]$ و $y \in J = [2; +\infty[$ نضع: $f(x) = y$ و $f^{-1}(y) = x$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3x^2 + 2 = y$$

ومنه:

$$\Leftrightarrow x^2 = y - 2 \quad ; \quad (y \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y - 2} \notin I =]-\infty, 0] \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{y - 2} \in I =]-\infty, 0]$$

ومنه: $x = -\sqrt{y - 2}$

$$g^{-1}: J = [2; +\infty[\rightarrow I =]-\infty, 0]$$

خلاصة: الدالة العكسية g^{-1} من J إلى I مع: $x \mapsto g^{-1}(x) = -\sqrt{x - 2}$