

سلسلة 1: تمارين حول الاتصال

تمرين 1

أدرس اتصال f في x_0 في الحالتين التاليتين

$$x_0 = 2 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{-4 + x^2}{x - 2} & x > 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 12} & x \leq 2 \end{cases} \quad \text{أ-}$$

$$x_0 = 1 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{(x-1)^2}{|x-1|} & x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{ب-}$$

تمرين 2

أحسب a و b و c لكي تكون f متصلة في 3

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} & x > 3 \\ f(x) = \frac{-4 + cx^2}{x - 2} & x < 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

تمرين 3

لتكن f الدالة العددية بحيث : $f(x) = \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

1 - حدد D_f واحسب نهايات f عند محددات D_f .

2 - ادرس اتصال الدالة f على D_f .

3 - هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في 2 ؟

في (-4) ؟

تعريف

لتكن f دالة غير معرفة في x_0 لكن لها نهاية l في x_0

الدالة g المعرفة بـ $\begin{cases} g(x) = f(x) & x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$ هي دالة

متصلة في x_0 تسمى تمديد بالاتصال لدالة f في x_0

تمرين 4

حدد مجموعة تعريف الدالة f و أدرس اتصالها على D_f

في الحالات التالية

$$\text{أ- } f(x) = 2x^2 - 3x + 6 \quad \text{ب- } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 3x - 4}$$

$$\text{ج- } f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + \frac{x}{x+1} \quad \text{د- } f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x-3}}$$

$$\text{ر- } f(x) = x^2 + \sin(3x + 4)$$

تمرين 5

لتكن f دالة متصلة على قطعة $[a; b]$ بحيث :

$$f(a) < ab \quad \text{و} \quad f(b) > b^2$$

باستعمال مبرهنة القيم الوسيطة على الدالة g حيث $g(x) = f(x) - bx$ بين أنه يوجد عنصر c من المجال

$$[a; b] \quad \text{بحيث} \quad f(c) = bc$$

تمرين 6

بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال I :

$$1 - f(x) = x^4 + 4x - 8 \quad \text{و} \quad I = [1; 2]$$

$$2 - f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2} \quad \text{و} \quad I = [-3; -2]$$

$$3 - f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad I = [0; 1]$$

ب- باستعمال طريقة التفرع النهائي أعط قيمة مقربة للعدد x_0 بالدقة 10^{-2}

تمرين 7

بين أن المعادلة $x^3 - 3x + 1 = 0$ تقبل بالضبط ثلاثة

حلول في IR ثم أعط تأطيرا لكل منها إلى 5×10^{-1}

تمرين 8

لتكن f الدالة العددية بحيث : $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

1 - بين أن القصور g للدالة f على المجال

$$I = [-1; 4] \quad \text{يقبل دالة عكسية}^{-1} g \quad \text{من مجال } J$$

يجب تحديده نحو I .

2 - حدد g^{-1} .

تمرين 9

نعتبر f دالة المعرفة على $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

$$f(x) = 2x^2 - x + 1 \quad \text{ب-}$$

بين أن f يقبل دالة عكسية f^{-1} من مجال J

يجب تحديده نحو I ثم حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 10

$$f(x) = x + \sqrt{x+1}$$

(1) بين أن f تقبل دالة عكسية من مجال J يتم تحديده

نحو المجال $I = [-1; +\infty[$

(2) تحقق من أن $f^{-1}(1) = 0$

(3) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 11

f دالة معرفة على المجال $I =]-\infty; 3]$ بما يلي:

$$f(x) = (x-3)^2 - 1$$

(1) بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال J

يتم تحديده نحو المجال I

(2) أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 12

حل في IR المعادلات التالية :

$$1 - x^3 + 7 = 0 \quad \text{و} \quad x^6 - 3 = 0$$

$$3 - \sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{4}$$

$$4 - \sqrt[3]{(3+x)^2} + \sqrt[3]{(3-x)^2} = 2\sqrt[3]{9-x^2}$$

سلسلة 1: تمارين حول الاتصال – تابع-

تمرين 13

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \sqrt[3]{x+1}} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - 2\sqrt[3]{x^3 + 2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x+63} - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{x^3 + x^2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x} - 1}$$

تمرين 14

1- أكتب مقامات الأعداد التالية على شكل عدد

$$\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} ; \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} ; \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}$$

2- رتب الأعداد التالية تزايدياً:

$$\sqrt{2} \text{ و } \sqrt[3]{3} \text{ و } \sqrt[4]{4} \text{ و } \sqrt[6]{6}$$

$$\sqrt[3]{25} \text{ و } \sqrt[6]{100} \text{ و } \sqrt[10]{225} \text{ و } \sqrt[15]{400}$$

تمرين 15

احسب :

$$b = \frac{2^{\frac{5}{2}} 3^{\frac{5}{2}} \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2^2}} \right)^3}{\left(2^{\frac{2}{3}} \right)^2 \left(\sqrt[5]{3^{-3}} \right)^4} ; a = \frac{4\sqrt[4]{9} \sqrt[3]{3^3} \sqrt[4]{9}}{\sqrt[5]{81} \sqrt{\sqrt{3}}}$$

تمرين 16

نعتبر f دالة المعرفة بـ $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

1- أدرس تغيرات f وأنشئ منحناها في معلم

متعامدمنظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$

2- لتكن g قصور f على المجال $I = [1, +\infty[$

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} من مجال J يتم

تحديده نحو المجال I

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J وارسم منحنى g^{-1}

في نفس المعلم

تمرين 17

$$\text{نعتبر } f \text{ دالة المعرفة بـ } f(x) = \frac{x}{4-x^2}$$

1- حدد D_f

2- أحسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

3- نعتبر g قصور الدالة f على المجال $I =]-2, 2[$

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} من مجال J يتم

تحديده نحو المجال I

ب- أدرس اتصال g^{-1} في 0

4- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 18

$$\text{نعتبر } f \text{ دالة المعرفة بـ } f(x) = \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x}$$

1) حدد D_f

2) لتكن g قصور f على المجال $I =]0, 2]$

(a) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} من مجال J يتم

تحديده نحو المجال I

(b) حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 19

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$$

1- حدد D_f وادرس اتصال f على D_f

2- بين أن f تزايدية قطعاً على D_f

3- استنتج أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} من مجال J يتم

تحديده نحو D_f

4- أحسب $f^{-1}(1)$

5- حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 20

$$\text{نعتبر } f \text{ دالة المعرفة بـ } f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}$$

1- حدد D_f

2- لتكن g قصور f على المجال $I = [0, +\infty[$

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} من مجال J يتم

تحديده نحو المجال I

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 21

نعتبر f دالة المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x-2} & x \geq 3 \\ f(x) = x - 1 + \sqrt[3]{3-x} & x < 3 \end{cases}$$

1- حدد D_f و نهايات عند محدثاتها .

2 - أدرس اتصال f .

ليكن g قصور الدالة f على $I = [3; +\infty[$.

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} من مجال J يتم

تحديده نحو المجال I

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J