

الاتصال و دراسة الدوال

تمرين 1

احسب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{15x^3 + 7x + 10} - \sqrt[3]{15x^3 + 1}$$

الحل:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{15x^3 + 7x^2 + 10} - \sqrt[3]{15x^3 + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 + 9}{\sqrt[3]{15x^3 + 7x^2 + 10}^2 + \sqrt[3]{15x^3 + 7x^2 + 10}\sqrt[3]{15x^3 + 1} + \sqrt[3]{15x^3 + 1}^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(7 + \frac{9}{x^2} \right)}{x^2 \left(\sqrt[3]{15 + \frac{7}{x} + \frac{10}{x^3}}^2 + \sqrt[3]{15 + \frac{7}{x} + \frac{10}{x^3}} \sqrt[3]{15 + \frac{1}{x^3}} + \sqrt[3]{15 + \frac{1}{x^3}}^2 \right)} \end{aligned}$$

$$A = \frac{7}{3\sqrt[3]{15}^2}$$

تمرين 2

حدد D_f ثم بين أن f متصلة في x_0 :

$$x_0 = 3375 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 15}{x - 3375} & x \neq 3375 \\ f(3375) = \frac{1}{675} \end{cases}$$

الحل التمرين 2:

$$D_f = \square^+$$

طريقة 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3375} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3375} \frac{\sqrt[3]{x} - 15}{x - 3375} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3375} \frac{1}{\sqrt[3]{x}^2 + 15\sqrt[3]{x} + 225} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3375} f(x) = \frac{1}{675}$$

$$f(3375) = \frac{1}{675} \quad \text{بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3375} f(x) = f(3375) \quad \text{فإن :}$$

إذن : f متصلة في 3375

طريقة 2 (العدد المشتق)

نعتبر : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ متلة على $\square$ قابلة للإشتقاق على $\square^*$

$$\forall x \in \square^* \quad g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2} \quad \text{و}$$

نعتبر : $x_0 = 3375$, $g(3375) = 15$ و

$$g'(3375) = \frac{1}{675}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3375} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3375} \frac{g(x) - g(3375)}{x - 3375} \\ &= g'(3375) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3375} f(x) = \frac{1}{675}$$

$$f(3375) = \frac{1}{675} \quad \text{بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3375} f(x) = f(3375) \quad \text{فإن :}$$

إذن : f متصلة في 3375

تمرين 3

$$f(x) = 3x + \sqrt{2x - 6}$$

حدد D_f

أ- اثبت أن f المعرفة من I نحو J (يجب تحديد J) تقبل

دالة عكسية f^{-1} . ثم حدد f^{-1}

ب- استنتج أن المعادلة : $f(x) = 10$ تقبل حلا وحيدا في

المجال I

حل التمرين 3:

$$I = D_f = [3, +\infty[\quad \text{أ-}$$

(1) f متصلة على D_f قابلة للإشتقاق على $]3, +\infty[$

$$\forall x \in]3, +\infty[\quad f'(x) = 3 + \frac{1}{\sqrt{2x - 6}}$$

$$\forall x \in]3, +\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{بما أن :}$$

(2) f تزايدية قطعاً على $]3, +\infty[$

$$\text{إذن : } f([3, +\infty[) = [f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

$$\text{و منه : } f([3, +\infty[) = [9, +\infty[$$

من (1) و (2) : f تقبل دالة عكسية f^{-1}

تحديد : f^{-1}

$$\text{ليكن } x \in [9, +\infty[\quad \text{و } y \in [3, +\infty[$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow 3y + \sqrt{2y - 6} = x$$

$$\Leftrightarrow 2y - 6 = x^2 + 9y^2 - 6xy$$

$$\Leftrightarrow 9y^2 - 2y(3x + 1) + (x^2 + 6) = 0$$

g متصلة على $\left[\sqrt{\frac{12}{13}}; +\infty\right[$ قابلة للاشتقاق على

$$\forall x \in \left[\sqrt{\frac{12}{13}}; +\infty\right[: g'(x) = \frac{13x}{\sqrt{13x^2 - 12}} - 1$$

$$g'(1) = 12 \text{ و } g(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{13x^2 - 12} - x}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

$$= g'(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 12$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$
ومنه : f متصلة في 1

ب- لنبين أن f قابلة للاشتقاق في 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{13x^2 - 12} - x}{x - 1} - 12}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{13x^2 - 12} - (13x - 12)}{(x - 1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(13x^2 - 12) - (13x - 12)^2}{(x - 1)^2 (\sqrt{13x^2 - 12} + (13x - 12))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-156x^2 + 312x - 156}{(x - 1)^2 (\sqrt{13x^2 - 12} + (13x - 12))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-156(x - 1)^2}{(x - 1)^2 (\sqrt{13x^2 - 12} + (13x - 12))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-156}{\sqrt{13x^2 - 12} + (13x - 12)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \frac{-156}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -78$$

إذن : f قابلة للاشتقاق في 1

$$9y^2 - 2y(3x + 1) + (x^2 + 6) = 0$$

$$\Delta = 4(3x + 1)^2 - 4(x^2 + 6) \times 9$$

$$\Delta = 4(6x - 53)$$

بما أن : $x \geq 9$ فإن : $6x - 53 > 0$

$$y_1 = \frac{3x + 1 - \sqrt{6x - 53}}{9}$$

$$\text{أو } y_2 = \frac{3x + 1 + \sqrt{6x - 53}}{9}$$

بالنسبة ل $x = 9$ نجد : $y_1 = 3$ و $y_2 \neq 3$

بما أن : $f(3) = 9$ فإن : $f^{-1}(x) = y_1$

$$\text{إذن : } f^{-1}(x) = \frac{3x + 1 - \sqrt{6x - 53}}{9}$$

$$\forall x \in [9; +\infty[$$

$$f^{-1} : [9; +\infty[\rightarrow [3; +\infty[$$

$$x \rightarrow \frac{3x + 1 - \sqrt{6x - 53}}{9} \quad \text{ومنه :}$$

ب- بما أن f متصلة و رتيبة قطعاً على $[3; +\infty[$

$$10 \in [9; +\infty[\text{ و } f([3; +\infty[) = [9; +\infty[$$

فإن : المعادلة : $f(x) = 10$ تقبل حلاً وحيداً في المجال I

تمرين 4

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{13x^2 - 12} - x}{x - 1} & x \in \left[\sqrt{\frac{12}{13}}; +\infty\right[- \{1\} \\ f(1) = 12 \end{cases}$$

أ- بين أن f متصلة في 1

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق في 1

ج- احسب $f'(x)$

حل التمرين 4:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{13x^2 - 12} - x}{x - 1} & x \in \left[\sqrt{\frac{12}{13}}; +\infty\right[- \{1\} \\ f(1) = 12 \end{cases}$$

أ- لنبين أن : f متصلة في 1

$$\left[\sqrt{\frac{12}{13}}; +\infty\right[\text{ نعتبر : } g(x) = \sqrt{13x^2 - 12} - x \text{ معرفة على}$$

$$f'(1) = -78 \text{ و :}$$

$$\forall x \in \left] \sqrt{\frac{12}{13}}; +\infty \right[- \{1\} \quad \text{ج-}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{13x^2 - 12} - x}{x - 1} \right)'$$

$$= \frac{\left(\frac{13x}{\sqrt{13x^2 - 12}} - 1 \right)(x - 1) - (\sqrt{13x^2 - 12} - x)}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{13x^2 - 12} - 13x + 12}{(x - 1)^2 \sqrt{13x^2 - 12}}$$

تمرين 5

حلل هندسيا ما يلي :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 0 \quad \text{أ-}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -\infty \quad \text{ب-}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = +\infty \quad \text{ج-}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = +\infty \quad \text{د-}$$

حل اتمرين 5

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 0 \quad \text{أ-}$$

(C_f) يقبل نصف مماس أفقي يسار النقطة ذات الأفصول 3

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -\infty \quad \text{ب-}$$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول 3
موجه نحو الأسفل .

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = +\infty \quad \text{ج-}$$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول 3
موجه نحو الأعلى .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = +\infty \quad \text{د-}$$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يسار النقطة ذات الأفصول 3
موجه نحو الأسفل .