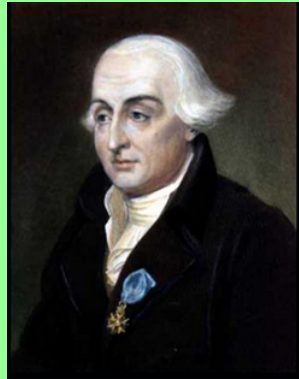
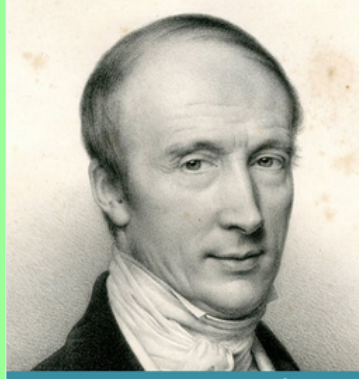


نبذة عن عالم

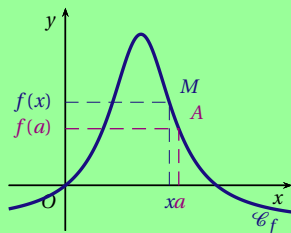
عرف القرن التاسع عشر اهتماما واسعا بالدقة الرياضية المؤدية إلى تحديد المفاهيم الأساسية للتحليل . و كان عالم الرياضيات و الفيزياء الفرنسي أوغستان لوي كوشي (1789 – 1857م) *Augustin – Louis Cauchy* من بين رموز هذا التوجه . دخل كوشي مدرسة الهندسة (مدرسة الجسور و الطرق) وأشرف عليه بيير جيرارد *Pierre Girard* في مشروع قناة *Ourcq* ، وأسهم في انشاء ميناء بحري في شيربورغ عام 1810 . تميز كوشي بأعماله في الرياضيات ، وحل مجموعة مسائل تحد طرح عليه لاغرانج *Lagrange* ، وفي عام 1814 نشر بحثا عن التكاملات المحدودة ، وعين كوشي في هذا العام أستاذا مساعدا في التحليل في مدرسة البوليتكنيك . درّس طرق التكامل في كلية العلوم ، ووضع تعاريف دقيقة للنهايات والاتصال و التكامل و لتقارب المتتاليات و المتسلسلات . و ساهم في تعريف الاتصال على مجال $[a, b]$.



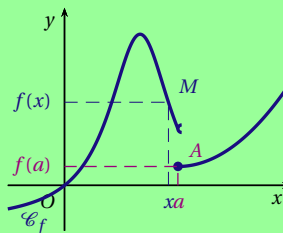
جوزيف لوي لاغرانج



أوغستان لوي كوشي



f في متصلة a



f في متصلة غير a

La notion de continuité nous est familière : le temps s'écoule d'une manière continue , on ne passe pas brutalement de 12h à 12h01s , il n'y pas de saut . C'est en ce sens que l'expression fonction continue est employée en mathématiques .

بطاقة تقنية رقم : 02	
ثانوية : الفتح التأهيلية السنة الدراسية : 2015 - 2016 الأستاذ : عادل بناجي	المستوى : الثانية باكوريا علوم تجريبية درس : النهايات والاتصال التدبير الزمني : 15 ساعة
فقرات الدرس 4 الاتصال في نقطة - الاتصال على مجال 5 العمليات على الدوال المتصلة 6 صورة مجال بدالة متصلة 1 مبرهنة القيم الوسطية 2 الدالة العكسية لدالة متصلة 3 دالة الجذر من الرتبة n	
المكتسبات القبلية • عموميات حول الدوال العددية • دراسة الدوال العددية • مفاهيم أساسية في درس النهايات والاشتقاق	
الكفاءات المستهدفة • تحديد صورة قطعة أو مجال بدالة متصلة و بدالة متصلة و رتيبة قطعاً ؛ • تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة في دراسة بعض المعادلات والمتراجحات أو دراسة إشارة بعض التعابير...؛ • استعمال طريقة التفرع الثنائي (<i>ladichotomie</i>) في تحديد قيم مقربة لحلول المعادلة أو لتأطير هذه الحلول ؛ • تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة و مبرهنة الدالة التقابلية في حالة دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال ؛	
التوجيهات التربوية • يتم اعتماد التعريف التالي : نقول إن دالة f متصلة في النقطة x_0 إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ؛ • نقبل النتائج المتعلقة باتصال الدوال الحدودية والجذرية والدوال المثلثية والدالة جذر مربع ويتم التركيز على تطبيقاتها ؛ • نقبل أن صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة وأن صورة مجال بدالة متصلة هي مجال ثم نستنتج مبرهنة القيم الوسطية ؛ • نقبل خاصيات العمليات على الدوال المتصلة واتصال مركب دالتين .	
الوسائل اليداكتيكية سلسلة أنشطة - سلسلة تمارين - الكتاب المدرسي - ملخص المكتسبات السابقة ؛	

النهايات

نشاط

...

1 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 3x^5 - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{27x^7 - x^3}{11x^5 - 2x^2 - 15}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - 5x^3 - x^5 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 4x}{8x^4 + 2x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3x^3 + x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 30}{x^3 - 7x^2 - 5x + 75}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 27x^7 - x^3 - 4x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 6x + 4}{-x^3 + x^2 + 5x + 3}$$

2 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{20 - x^3}{11x - 2x^2 - 15}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{20 - x^3}{11x - 2x^2 - 15}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 4}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 4}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^2 + x - 4}{x^2 + 6x + 8}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x^2 + x - 4}{x^2 + 6x + 8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5x - 3}{-3x^2 + 11x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-5x - 3}{-3x^2 + 11x - 6}$$

3 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x^3 + x}{2x - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x - 30}{x^3 - 7x^2 - 5x + 75}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{11x - 2x^2 - 15}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 6x + 4}{-x^3 + x^2 + 5x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{5}} \frac{x + \sqrt{5}}{5 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

4 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x}$$

5 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 7} - 3x + 8$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 6x - 2} - x + 12$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 - 1 - 12x + \sqrt{4x+7}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - \sqrt{8x-3} + 2x^4 - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{7x-9} + 8x^5 - 4x^3 + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{-9x-4} - 8x^2 - 3x - 1$$

الأشكال غير محددة

الأشكال غير المحددة هي : $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0 \times \infty$ $+\infty - \infty$

خاصيات النهايات

خاصية

نهايات دوال اعتيادية في $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{|x|} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

خاصية

نهايات دوال اعتيادية في $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

خاصية

نهايات دوال اعتيادية في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

خاصية

نهايات الدوال الجذرية والحدودية

2 نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

1 نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

خاصية

نهايات الدوال المثلثية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$(a \neq 0); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

خاصية

النهايات و الترتيب

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\begin{cases} 0 < f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\begin{cases} u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\begin{cases} |f(x) - l| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\begin{cases} f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

الارتصال

1 الارتصال في نقطة - الارتصال على مجال

1.1 الارتصال في نقطة

نشاط

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمبايلي :

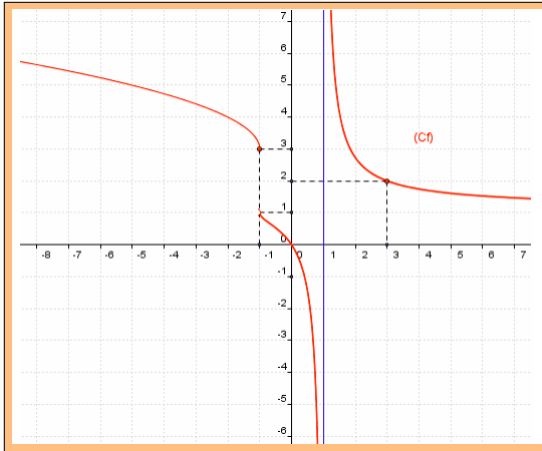
1 حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2 أحسب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

3 أنشئ التمثيل المبياني للدالة f

⚡ نلاحظ أن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ نقول إن الدالة f متصلة في 2

نشاط



لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (أنظر الشكل جانبه)

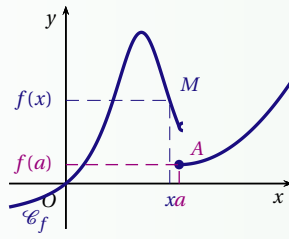
1 من خلال الشكل كيف ترى المنحنى C_f عند النقطة ذات الأفصول -1 ثم عند النقطة ذات الأفصول 3

2 أ. أوجد مبيانيا $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ و $f(3)$. ماذا تستنتج ؟

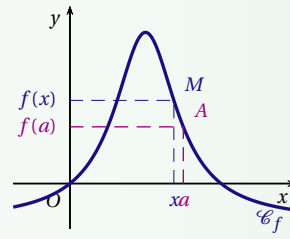
ب. أوجد مبيانيا $f(-1)$ ونهاية f عند -1 . ماذا تستنتج ؟

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I ، تكون f متصلة في a إذا وفقط إذا كان : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



f غير متصلة في a



f متصلة في a

مثال

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمبايلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ f(2) = 4 \end{cases}$ لنبين أن f متصلة في 1 .

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 2(x - 1) \\ &= 4 = f(2) \end{aligned}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ فإن f متصلة في 1 .

ملاحظة

إذا كانت f غير متصلة في a فإننا نقول إن f غير متصلة (أو منقطعة) في a .

تطبيقي تمرين

- ...
- 1 نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمبايلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} & ; x \neq 3 \\ f(3) = 6 \end{cases}$ بين أن f متصلة في 3 .
- 2 نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمبايلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & ; x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$ هل f متصلة في 1 ؟

تطبيقي تمرين

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمبايلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-8}{x-2} & ; x \neq 2 \\ f(2) = a \end{cases}$ حدد قيمة العدد الحقيقي a لكي تكون f متصلة في 2 .
- $; a \in \mathbb{R}$

2.1 الاتصال على اليمين - الاتصال على اليسار

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a, a+\alpha]$ حيث $(\alpha > 0)$ تكون f متصلة على اليمين في a إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]a-\alpha, a]$ حيث $(\alpha > 0)$ تكون f متصلة على اليسار في a إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I ، تكون f متصلة في a إذا وفقط إذا كانت متصلة على اليمين ومتصلة على اليسار في a أي :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

تطبيقي تمرين

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+3} & ; x > 1 \\ f(x) = x+1 & ; x \leq 1 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمبايلي :

- 1 أدرس اتصال f على اليمين وعلى اليسار في 1
- 2 هل الدالة f متصلة في 1 ؟

تطبيقي تمرين

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & ; x > 2 \\ f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-3} & ; x \leq 2 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمبايلي :

- 1 أحسب $f(2)$
- 2 أدرس اتصال f في 2

3.1 الاتصال على مجال

تعريف

- ...
- تكون الدالة f متصلة على المجال المفتوح $]a, b[$ إذا كانت متصلة في كل نقطة من المجال $]a, b[$.
 - تكون الدالة f متصلة على المجال المغلق $[a, b]$ إذا كانت متصلة على $]a, b[$ ومتصلة في a^+ و b^- .

ملاحظات

- ...
- نعرف بالمثل الاتصال على المجالات $[a, b]$ و $]a, b[$ و $[a, +\infty[$ و $]-\infty, b]$...
 - التمثيل المبياني لدالة متصلة على $[a, b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتان $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$.

مثال

دالة الجزء الصحيح

← دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي نرسم لها ب E و التي تحقق : $E(x) = n$ إذا كان $n \leq x < n+1$ (حيث $n \in \mathbb{Z}$)
 ← مثلاً :

$$3 \leq 3,5 < 3+1 \text{ لأن } E(3,5) = 3$$

$$5 \leq 5 < 5+1 \text{ لأن } E(5) = 5$$

$$-3 \leq -2,4 < -3+1 \text{ لأن } E(-2,4) = -3$$

$$4 \leq 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} \leq \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 \leq \sqrt{5} < 3 \text{ لأن } E(\sqrt{5}) = 2$$

1 مثل مبيانها الدالة E على المجال $[0,4[$

2 أدرس اتصال الدالة E على المجالات $[0,1[$ ، $[0,2[$ ، $]1,2[$ ، $]1,3[$ و $[3,3,5]$

خاصية

...

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالتين $x \mapsto \sin(x)$ و $x \mapsto \cos(x)$ متصلتين على $\mathbb{R}$
- الدالة $x \mapsto \tan(x)$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

أمثلة

...

• الدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)

• الدالة $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ متصلة على $\mathbb{R} - \{1\}$ (لأنها دالة جذرية)

• الدالة $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ متصلة بالخصوص على المجالين $] -\infty, 1[$ و $]3, +\infty[$ (لأنها $] -\infty, 1[\subset \mathbb{R} - \{1\}$ و $]3, +\infty[\subset \mathbb{R} - \{1\}$)

4.1 قصور دالة عددية

تعريف

إذا كانت f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J ضمن I بحيث $\forall x \in I \ f(x) = g(x)$ ، فإننا نقول إن الدالة g قصور الدالة f على المجال J .

نتيجة

إذا كانت الدالة f متصلة على I و g قصور الدالة f على المجال I فإن g متصلة على I

2 العمليات على الدوال المتصلة

خاصية

خاصية مقبولة

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عددا حقيقيا .
الدوال $f+g$ و $f-g$ و $f \cdot g$ و (kf) و $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلة على I .
($\forall x \in I, g(x) \neq 0$)

مثال

...

- 1 الدالة $x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$ (لأنها مجموع الدالتين $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ المتصلتين على $\mathbb{R}^+$)
- 2 الدالة $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ متصلة على $]0, +\infty[$ (لأنها مقلوب الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ المتصلة على $]0, +\infty[$ و لا تنعدم على $]0, +\infty[$)
- 3 الدالة $x \mapsto \frac{x+2}{\sqrt{x}+x^2}$ متصلة على $]0, +\infty[$ (لأنها خارج الدالة $x \mapsto x+2$ المتصلة على $]0, +\infty[$ و الدالة $x \mapsto \sqrt{x}+x^2$ المتصلة على $]0, +\infty[$ و لا تنعدم على $]0, +\infty[$)

تطبيقي تمرين

بين أن الدالة f متصلة على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1 $I =]0, +\infty[$ و $f(x) = 2x + \sqrt{x}$

2 $I = \mathbb{R}$ و $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$

3 $I =]0, +\infty[$ و $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$

4 $I = [0, +\infty[$ و $f(x) = \sin(x) + \sqrt{x}$

5 $I = \mathbb{R}$ و $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+1}$

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي : $\begin{cases} f(x) = x + a & ; x < 1 \\ f(x) = 2x - 3 & ; 1 \leq x \leq 3 \\ f(x) = bx + 1 & ; x > 3 \end{cases}$ حدد العددين الحقيقيين a و b لكي تكون f دالة متصلة على $\mathbb{R}$

نشاط

نعتبر f و g الدالتين العدديتين المعرفتين ب : $f(x) = x^2 + x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$

1 حدد الدالة $g \circ f$

2 ادرس اتصال f في 0 و اتصال g في $f(0)$

3 ادرس اتصال الدالة $g \circ f$ في 0

خاصية

اتصال مركب دالتين

لتكن f دالة متصلة على I و g دالة متصلة على J و $f(I) \subset J$
الدالة : $g \circ f$ متصلة على I .

مثال

لندرس اتصال الدالة f المعرفة ب : $f(x) = \sin\left(\frac{3}{x}\right)$ على D_f

• لدينا $D_f = \mathbb{R}^*$

• نضع : $f(x) = h(g(x))$ بحيث $g(x) = \frac{3}{x}$ و $h(x) = \sin(x)$

لدينا g دالة جذرية إذن فهي متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R}^*$ ؛ و h دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على $\mathbb{R}^*$ وبالتالي فإن f متصلة على $\mathbb{R}^*$ (لأنها مركب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}^*$)

تطبيقي تمرين

...

1 باستعمال مركب دالتين ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x) = \sin(x^3 - 3x + 2)$ على $\mathbb{R}$

2 باستعمال مركب دالتين ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ على $[-1, 1]$

نتائج

...

1 إذا كانت f دالة موجبة و متصلة على مجال I (أي $\forall x \in I: f(x) \geq 0$) فإن الدالة : $x \mapsto \sqrt{f}$ متصلة على المجال I

2 إذا كانت الدالة f متصلة على مجال I فإن الدالة : $x \mapsto \cos(f(x))$ متصلة على المجال I

3 إذا كانت الدالة f متصلة على مجال I فإن الدالة : $x \mapsto \sin(f(x))$ متصلة على المجال I

تطبيقي تمرين

...

1 ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمبايلي : $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x-1}}$ على المجال $]1, +\infty[$

2 ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمبايلي : $f(x) = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$ على $\mathbb{R}$

3 صورة مجال بدالة متصلة

1.3 صورة قطعة - صورة مجال

خاصية

خاصية مقبولة

...

• صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة

• صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

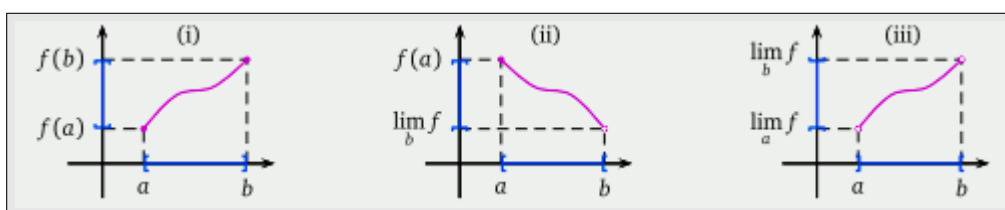
ملاحظة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ فإن $f([a, b]) = [m, M]$ حيث : m هي القيمة الدنيا ل f على $[a, b]$ ، و M هي القيمة القصوى للدالة f على $[a, b]$

2.3 صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة قطعاً

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I لدينا النتائج التالية :

المجال $f(I)$	المجال I	رتابة الدالة f
$[f(a), f(b)]$	$[a, b]$	f تزايدية قطعاً على I
$f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$	$[a, b[$	
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$]a, +\infty[$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$\mathbb{R}$	
$[f(b), f(a)]$	$[a, b]$	f تناقصية قطعاً على I
$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)$	$[a, b[$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	$]a, +\infty[$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$\mathbb{R}$	



4 مبرهنة القيم الوسطية

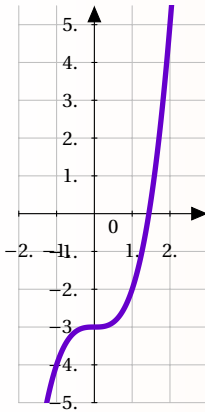
لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a, b]$
 بما أن $f([a, b]) = [m, M]$ فإن $f(a)$ و $f(b)$ ينتميان إلى القطعة $[m, M]$ و لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ لدينا
 $k \in [m, M]$. إذن : يوجد على الأقل عنصر c من $[a, b]$ بحيث $f(c) = k$

مبرهنة

مبرهنة القيم الوسطية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من المجال I .
 لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a, b]$ بحيث : $f(c) = k$

نشاط



نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = x^3 - 3$ وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (أنظر الشكل جانبه).

1 بين أن f تزايدية و متصلة على $[0, 2]$

2 أحسب $f(0)$ و $f(2)$ ثم استنتج $f([0, 2])$

3 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0, 2]$

ملاحظة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ بحيث $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ (أو $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$) فإن 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ و حسب مبرهنة القيم الوسطية فإنه يوجد على الأقل عنصر c من $[a, b]$ بحيث : $f(c) = 0$. العدد c هو حل المعادلة $f(x) = 0$

نتيجة

...

- إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ بحيث $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حل في $]a, b[$
- إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال $[a, b]$ بحيث $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حل في $]a, b[$

تطبيقي تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمبايلي : $f(x) = x^4 + x^2 + 4x - 1$ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حل في $[-1, 1]$

تطبيقي تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمبايلي : $f(x) = x^3 + x^2 + 4x - 1$
بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

5 طريقة التفرع الثنائي

نشاط

نعتبر الدالة العددية : $f(x) = x^3 + x + 1$

- 1 بين أن f متصلة على $[0, 1]$
- 2 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 0 و 1
- 3 أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ وتحقق أن $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$
- 4 أحسب $f\left(\frac{3}{4}\right)$ وتحقق أن $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$
- 5 أحسب $f\left(\frac{5}{8}\right)$ وتحقق أن $\alpha \in \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$
- 6 أحسب $f\left(\frac{11}{16}\right)$ واستنتج تأطيرا للعدد α
- 7 أحسب $f(0,682)$ و $f(0,683)$ واستنتج تأطيرا للعدد α سعته 10^{-3}

هناك بعض المعادلات من نوع $f(x) = 0$ لا يمكن حلها جبريا ؛ لكن يمكن تحديد قيمة مقربة لحل هذه المعادلة وذلك باستعمال طريقة التفرع الثنائي .

طريقة

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على $[a, b]$ و $f(a)f(b) < 0$ إذن يوجد عدد وحيد α حل للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a, b]$

- إذا كان $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ فإن $\frac{a+b}{2} < \alpha < b$ وهذا تأطير ل α سعته $\frac{b-a}{2}$
- نعيد هذه العملية بتعويض a ب $\frac{a+b}{2}$ فنحصل على تأطير سعته $\frac{b-a}{4}$...
- إذا كان $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ فإن $a < \alpha < \frac{a+b}{2}$ وهذا تأطير ل α سعته $\frac{b-a}{2}$
- نعيد هذه العملية بتعويض b ب $\frac{a+b}{2}$ فنحصل على تأطير سعته $\frac{b-a}{4}$...

نعيد هذه العملية ككل إلى أن نحصل على التأطير المرغوب فيه

تطبيقي تمرين

بين أن المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-1, -\frac{1}{2}\right]$ ؛ ثم حدد تأطيرا للعدد α سعته $\frac{1}{8}$

6 الدالة العكسية لدالة متصلة

1.6 الدالة العكسية

نشاط

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ ب : $f(x) = x^3 + x^2 + 4x - 1$

1 بين أن f تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$

2 تحقق أن $f([0, +\infty[) \subset [-1, +\infty[$

3 بين أن كل عنصر y من $[-1, +\infty[$ يقبل سابق وحيد x من $[0, +\infty[$ وأن $x = \frac{1}{2}\sqrt{y+1}$

ملاحظة

...

- كل عنصر من $[0, +\infty[$ له صورة وحيدة في $[-1, +\infty[$ و كل عنصر من $[-1, +\infty[$ له سابق وحيد في $[0, +\infty[$
- نقول إن f تقابل من $[0, +\infty[$ نحو $[-1, +\infty[$
- توجد دالة وحيدة يرمز لها ب f^{-1} معرفة على $[-1, +\infty[$ ب $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1}$ وتسمى الدالة العكسية للدالة f

خاصية

إذا كانت f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I فإن لكل عنصر y من $J = f(I)$ المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلاً وحيداً في I نعتبر عن هذا بقولنا f تقابل من I نحو J

تعريف

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I و $J = f(I)$ ، الدالة التي تربط كل عنصر y بالعنصر الوحيد x من I بحيث $f(x) = y$ تسمى الدالة العكسية للدالة f نرمز لها ب f^{-1}

نتائج

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية لدينا :

$$(\forall y \in J) (\exists! x \in I) : f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$(\forall x \in I) : (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$(\forall y \in J) : (f \circ f^{-1})(y) = y$$

تطبيقي تمرين

نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x) = \sqrt{x-1}$

- 1 بين أن f متصلة ورتيبة قطعاً على $[1, +\infty[$
- 2 استنتج أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال I يجب تحديده
- 3 حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من I

تطبيقي تمرين

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ ب : $f(x) = x^2$

- 1 بين أن f تقابل من $I = [0, +\infty[$ نحو $J = [0, +\infty[$
- 2 حدد f^{-1} الدالة العكسية للدالة f
- 3 أنشئ في نفس المعلم المتعامد المنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم $(\Delta): y = x$ والمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$. ماذا تلاحظ ؟

2.6 خصائص الدالة العكسية

نشاط

- لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية :
- الدالة f^{-1} معرفة ومتصلة على $J = f(I)$
 - الدالة f^{-1} رتيبة قطعاً على $J = f(I)$ ولها نفس منحنى تغير الدالة f
 - في المعلم المتعامد المنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ منحنى الدالة f^{-1} متماثل مع منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = x$

7 دالة الجذر من الرتبة n

خاصية

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = [0, +\infty[$ ب : $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$:
بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} على مجال J يجب تحديده .

نعلم أن الدالة $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) متصلة وتزايدية قطعاً على $I = [0, +\infty[$ إذن تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $J = f(I) = [0, +\infty[$

خاصية و تعريف

...

- الدالة العكسية f^{-1} تسمى دالة الجذر من الرتبة n
- الدالة العكسية f^{-1} يرمز لها ب $\sqrt[n]{}$
- نكتب $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ أو أيضا $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

ملاحظة

...

- حالة $n=1$: $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{x} = x$
- حالة $n=2$: $f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (الجذر مربع)
- حالة $n=3$: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ (الجذر مكعب)

خاصية

...

- في معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ منحنى الدالة $f(x) = \sqrt[n]{x}$ مع $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة $f(x) = x^n$ بالنسبة للنصف الأول (المستقيم $(\Delta): y = x$)
- $\sqrt[n]{1} = 1$ و $\sqrt[n]{0} = 0$
- $(\sqrt[n]{x})^n = x$ و $(\forall x \geq 0) \sqrt[n]{x^n} = x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

نتائج

...

- $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\forall b \in \mathbb{R}^+) : \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$
- $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\forall b \in \mathbb{R}^+) : \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$

مثال

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2 \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

تطبيقي تمرين

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : $x^3 = 5$ و $x^6 = -9$ و $x^4 = 81$ و $x^3 = -8$

خاصية

العمليات على الجذور من الرتبة n

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}^+$ و m و n عنصرين من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} &= \sqrt[n]{xy} \cdot \\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}} &= \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \cdot \quad (y \neq 0) \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} &= \sqrt[nm]{x} \text{ و } \sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m} \cdot \quad (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} \cdot \end{aligned}$$

تطبيقي تمرين

أحسب وسط العدد A حيث : $A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{9^5}}{\sqrt[3]{3}}$

1.7 القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب

تعريف

ليكن x عدد حقيقي موجب قطعاً و r عدداً جذرياً غير منعدم حيث $r = \frac{p}{q}$ $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ القوة الجذرية للعدد الحقيقي x ذات الأساس r هي العدد الحقيقي x^r والمعرفة بمايلي : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

مثال

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \text{ ؛ } \sqrt{x^5} = x^{\frac{5}{2}} \text{ ؛ } \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

خاصية

ليكن r و r' عددين جذريين و a و b عددين حقيقيين موجبين قطعاً لدينا :

$$\begin{aligned} a^r a^{r'} &= a^{r+r'} \cdot & \frac{a^r}{b^{r'}} &= a^{r-r'} \cdot & (a^r)^{r'} &= a^{rr'} \cdot \\ \frac{a^r}{b^r} &= \left(\frac{a}{b}\right)^r \cdot & \frac{1}{a^r} &= a^{-r} \cdot & a^r b^r &= (ab)^r \cdot \end{aligned}$$

تطبيقي تمرين

بسّط العددين A و B حيث : $A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right)$ ؛ $B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}}$