

## I. النهايات ( تذكير )

### نشاط 1 :

(1) أذكر بالأشكال الغير المحددة .

(2) أذكر بعض خصائص النهايات و الترتيب .

جواب :

(1) الأشكال الغير المحددة هي :

$$\begin{array}{ll} \bullet \quad 1^\infty & (6) \quad 0^0 \quad (5) \quad \frac{0}{0} \quad (4) \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad (3) \quad 0 \times (\pm\infty) \quad (2) \quad (-\infty) + (+\infty) ; \quad (+\infty) + (-\infty) \quad (1) \end{array}$$

(2) ذكر بعض خصائص النهايات و الترتيب .

و g و h دوال عدديه حيث :

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow ?} g(x) = +\infty$  و  $f(x) \leq g(x)$  فإن  $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = +\infty$  .

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = -\infty$  و  $g(x) \leq f(x)$  فإن  $\lim_{x \rightarrow ?} g(x) = -\infty$  .

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow ?} h(x) = \ell$  فإن  $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = \ell$  و  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  .

$$? = (x \rightarrow x_0^\pm) \quad x \rightarrow \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow ?} h(x) = \ell \quad \lim_{x \rightarrow ?} f(x) = \ell \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

### نشاط 2 :

#### تمرين 1 :

الرسم التالي يمثل منحنى دالة f .

أ- حدد مبيانيا  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة f .

ب- استنتج مبيانا نهايات f عند محدات  $D_f$  و كذلك في 1 .

#### تمرين 2 :

أحسب النهايات التالية :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + 1)^3 (3x + 2)$  و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 - 8x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{|4-2x|} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x + |x+2|$$

#### تمرين 3 :

حدد a علما أن f لها نهاية في 3 حيث f معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}} & ; x > 3 \\ f(x) = \frac{a}{x-1} & ; x \leq 3 \end{cases}$$

#### تمرين 4 :

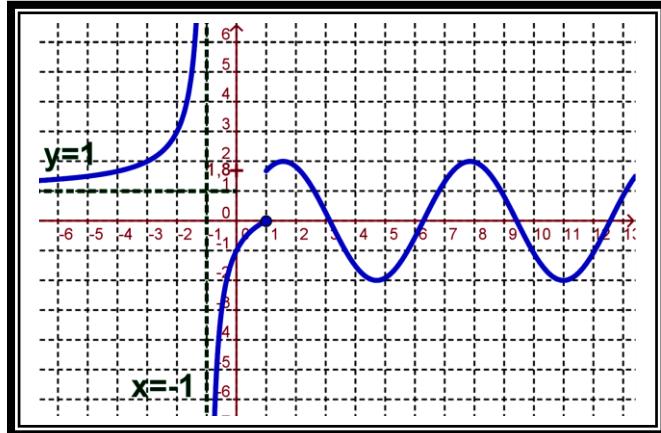
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \cos x}{1+x^2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$$

#### تمرين 5 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-|x-1|}$

أ- حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة f .

ب- أحسب نهايات f عند محدات  $D_f$  .





## II. اتصال دالة عددية في نقطة $x_0$ :

### 01. نشاط 1 :

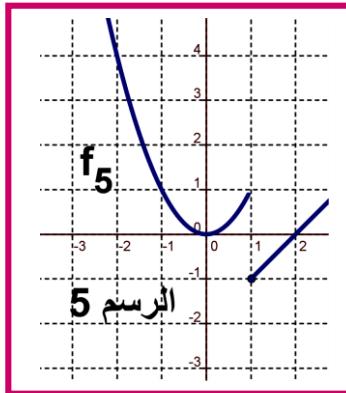
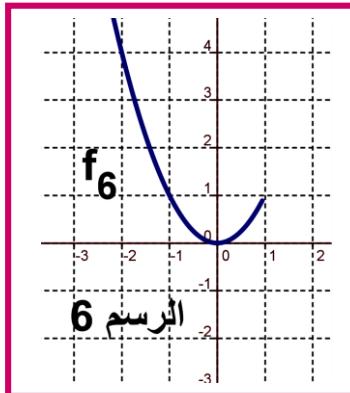
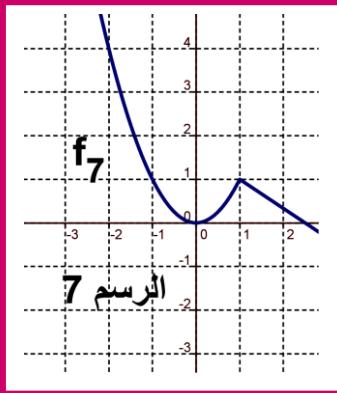
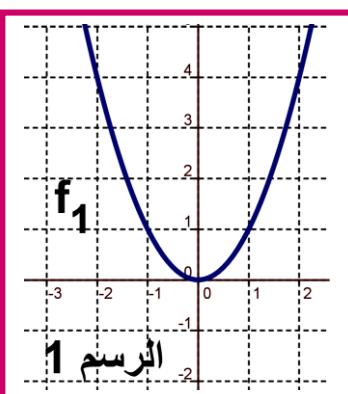
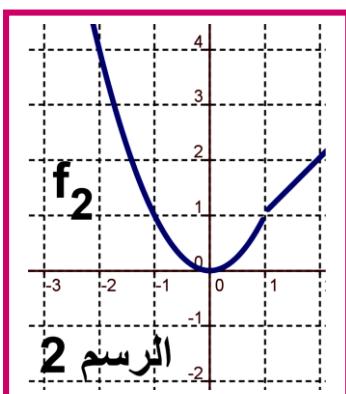
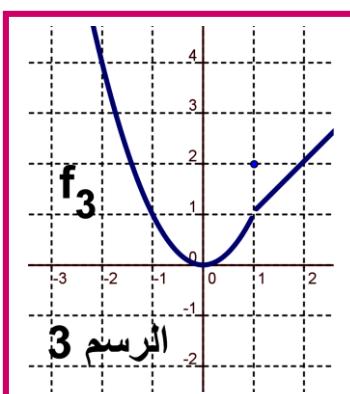
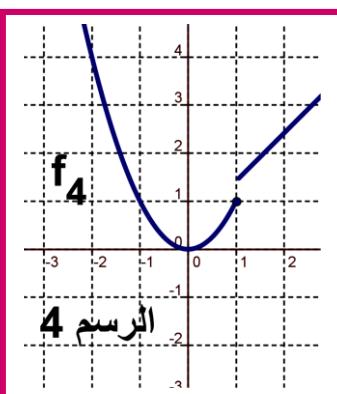
المنحنى التالية تمثل الدوال  $f_i$  مع  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

(1) نأخذ النقطة التي أقصولها  $x_0 = 1$  ماذا تلاحظ؟

(2) استنتج مبيانا  $\lim_{x \rightarrow 1} f_i(x)$  مع  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(3) الرسم 1 و 7 يمثلان دالتين متصلتين في النقطة  $x_0 = 1$  وفي الحالات الأخرى غير متصلة في النقطة  $x_0 = 1$ .

(4) أعط تعريف لاتصال دالة في نقطة  $x_0$ .



### 02. تعريف :

$f$  دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $I_{x_0} = [x_0 - r, x_0 + r]$  (معرفة على مجال مفتوح  $I$  و  $x_0$  من  $I$ ).

$f$  متصلة في  $x_0$  يكافي:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

## III. الاتصال على اليمين والاتصال على اليسار في نقطة $x_0$

### 01. تعريف 1 - 2 :

$f$  دالة عددية معرفة على  $I_d = [x_0, x_0 + r]$  حيث  $r > 0$ .  $f$  متصل على يمين  $x_0$  يكافي:

$f$  دالة عددية معرفة على  $I_g = [x_0 - r, x_0]$  حيث  $r > 0$ .  $f$  متصل على يسار  $x_0$  يكافي:



نأخذ النشاط السابق أدرس مبيانيا اتصال بعض من  $f$  على يمين ويسار النقطة  $x_0 = 1$  مع  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

دالة  $f$  متصلة في  $x_0$  يكفي  $f$  متصل على يسار و على يمين  $x_0$ .

## IV. التمديد بالاتصال في النقطة $x_0$

•  $f$  و  $G$  و  $F$  ثالث مجموعات  $f$  و  $g$  دالتان عدديتان حيث:  $f: E \rightarrow G$  و  $g: F \rightarrow G$ .

إذا كان  $F \subset E$  و  $\forall x \in F : f(x) = g(x)$ .

•  $g = f|_F$  تسمى تمديد ( prolongement ) لـ  $g$ . تسمى قصور ( restriction )  $f$  على  $F$ . نكتب:

دالة عدديه يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $\{x_0\}$  مع  $r > 0$ . حيث:

•  $f$  غير معرفة في  $x_0$

•  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

الدالة  $g$  المعرفة بـ: 
$$\begin{cases} g(x) = f(x) ; x \in D_f, x \neq x_0 \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$$

الدالة  $g$  تسمى تمديد بالاتصال للدالة  $f$  في النقطة  $x_0$

•  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  لدينا:  $f(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1}$

•  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|(|x| - 1)}{|x| - 1} \lim_{x \rightarrow 1} |x| = 1$

• وبالتالي الدالة  $g$  المعرفة بـ: 
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ g(1) = 1 \end{cases}$$
 هي تمديد بالاتصال للدالة  $f$  في النقطة  $1 = x_0$

• كذلك الدالة  $h$  المعرفة بـ: 
$$\begin{cases} h(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ h(-1) = 1 \end{cases}$$
 هي تمديد بالاتصال للدالة  $f$  في النقطة  $-1 = x_0$



- كذلك الدالة  $k$  المعرفة بـ: 
$$\begin{cases} k(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} & ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ k(-1) = k(1) = 1 \end{cases}$$
 هي تمديد بالاتصال للدالة  $f$  في النقطة  $-1 = x_0$  و في  $1 = x_0$ .

ملحوظة : يمكن كتابة الدالة  $k$  على الشكل التالي :

## V. اتصال دالة على مجال

### 01. تعاريف:

- دالة متصلة على مجال مفتوح  $I = [a; b]$  (يکافی  $f$  متصلة في كل نقطة  $x_0$  من  $I$ ).
- دالة متصلة على مجال  $[a, b] = I$  (يکافی:  $f$  متصلة على  $[a, b]$  و متصلة على يمين  $a$  و متصلة على يسار  $b$ ).
- دالة متصلة على مجال  $[a, +\infty)$  (يکافی:  $f$  متصلة في كل نقطة  $x_0$  من  $[a, +\infty)$  و  $f$  متصلة على يمين في  $a$ ).

### 02. مثال:

لنعتبر الدالة:  $f(x) = x^2 + 3x$

بين أن :  $f$  متصلة على المجال المفتوح  $[1; 5] = I$ .

## VI. اتصال الدوال الاعتيادية:

### 01. خاصية:

كل دالة حدودية فهي متصلة على مجموعة تعريفها  $D_f = \mathbb{R}$

كل دالة جزوية فهي متصلة على مجموعة تعريفها  $D_f$ .

$D_f = \mathbb{R}$  و  $f(x) = \cos x$  و  $f(x) = \sin x$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$   $f(x) = \tan x$

الدالة:  $D_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$   $f(x) = \sqrt{x}$  متصلة على مجموعة تعريفها

الدالة:  $D_f = \mathbb{R}$   $f(x) = |x|$  متصلة على مجموعة تعريفها

## VII. العمليات على الدوال المتصلة:

### 01. خاصية: (تقابل)

I مجال ضمن المجموعة  $\mathbb{R}$  ( $I \subset \mathbb{R}$ ).

إذا كانت  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على المجال  $I$  فإن الدوال:  $af$  و  $f+g$  و  $f \times g$  و  $f \div g$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) متصلة على  $I$ .

إذا كانت  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على المجال  $I$  و  $g$  لا تنعدم على المجال  $I$  فإن الدوال:  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{1}{g}$  متصلة على  $I$ .

### 02. مثال:

لنعتبر الدوال التالية المعرفة بـ: (1)  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} + \cos(x)$

(1) حدد مجموعة تعريف واتصال كل دالة من الدوال السابقة.



- الدالة  $x \rightarrow \frac{2x+1}{x-1}$  معرفة و متصلة على  $\mathbb{R}$ . الدالة  $x \rightarrow \cos x$  معرفة و متصلة على  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

إذن الدالة  $D_f = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  معرفة و متصلة على  $\mathbb{R}$ .

- الدالة  $x \rightarrow x^2 + 3x - 2$  معرفة و متصلة على  $\mathbb{R}$ . الدالة  $x \rightarrow \sqrt{x}$  معرفة و متصلة على  $[0, +\infty]$ .

إذن الدالة  $D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$ .

## VIII. اتصال مركبة دالتي متصلتين:

$$f(I) \subset J \xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$g \circ f : I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

## 01. خاصية:

لتكن  $f$  و  $g$  دالتي عدديتين.

- إذا كانت  $f$  متصلة في  $x_0$  و الدالة  $g$  متصلة في  $(x_0)$  فإن الدالة  $g \circ f$  متصلة في  $x_0$ .
- إذا كانت  $f$  متصلة على مجال  $I$  و  $g$  متصلة على مجال  $J$  حيث:  $f(I) \subset J$  فإن الدالة  $g \circ f$  متصلة على  $I$ .

## 02. مثال: أدرس اتصال الدالة $f(x) = \sin(2x+1)$

الدالة  $x \rightarrow 2x+1$  متصلة على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $x \rightarrow \sin x$  متصلة على  $\mathbb{R}$  و  $f$  إذن الدالة:  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$  (لأنها مركبة دالتي متصلتين)

## 03. نتائج:

$f(x) = \sin(ax+b)$  و  $g(x) = \cos(ax+b)$  دالتن متصلتان على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $h(x) = \tan(ax+b)$  متصلة في كل  $x$  تتحقق ما يلي  $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

دالة موجبة و متصلة على المجال  $I$  فإن الدالة  $f(x) = \sqrt{h(x)}$  متصلة على  $I$ .

## IX. دالة الجزء الصحيح :

### 01. تعريف: ( تذكرة )

الدالة  $f$  التي تربط كل عنصر  $x$  من  $\mathbb{R}$  بالعدد الصحيح النسبي الوحد  $p$  الذي يتحقق  $p \leq x < p+1$  تسمى الدالة الجزء الصحيح

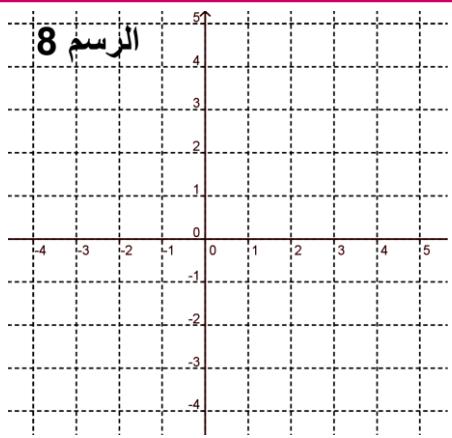
و يرمز لها ب  $E$  أو أيضا  $f(x) = [x]$  نكتب  $p$  أو  $E(x) = [x]$

### 02. نشاط:

(1) أنشئ منحنى الدالة  $f(x) = E(x)$

(2) هل  $f$  متصلة على يمين في  $0$  و  $1$  و  $2$  و  $3$  و  $-1$  و  $-2$  .

الرسم 8





(3) هل  $f$  متصلة على يسار  $0$  و  $1$  و  $2$  و  $3$  و  $1$  و  $2$  و  $0$  .

(4) هل  $f$  متصلة في  $0$  و  $1$  و  $2$  و  $3$  و  $1$  و  $2$  و  $0$  .

(5) هل  $f$  متصلة على  $[0;1]$  و  $[1;2]$  و  $[2;3]$  .

(6) أعط الخاصية.

**03. خاصية:**

دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين  $p$  وغير متصلة على اليسار  $p$  (إذن هي غير متصلة في  $p$ ).

دالة الجزء الصحيح متصلة على كل المجالات التي هي على شكل:  $[p, p+1]$  ( $p \in \mathbb{Z}$ )

**X. صورة مجال بدالة متصلة :**

**01. نشاط:**

نأخذ النشاط أول الدرس و الرسم رقم 1 الذي يمثل الدالة:  $f(x) = x^2$

(1) استنتج مبيانا صور جميع الأعداد التي تنتمي إلى القطعة  $[0,2]$

(2) استنتاج مبيانا:  $f([-1,0])$  و  $f([-1,2])$ . أعط الخاصية.

**02. خاصية:**

صورة قطعة  $[a,b]$  بدالة متصلة  $f$  هي قطعة ( تكون على شكل  $[m,M]$  مع  $m$  و  $M$  هي القيمة الدنيا والقيمة القصوى على

التوالى ل  $f$  على المجال  $[a,b]$  ). (أو أيضا:  $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$  و  $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$  )

صورة مجال I بدالة متصلة  $f$  هي مجال  $(J = f(I))$

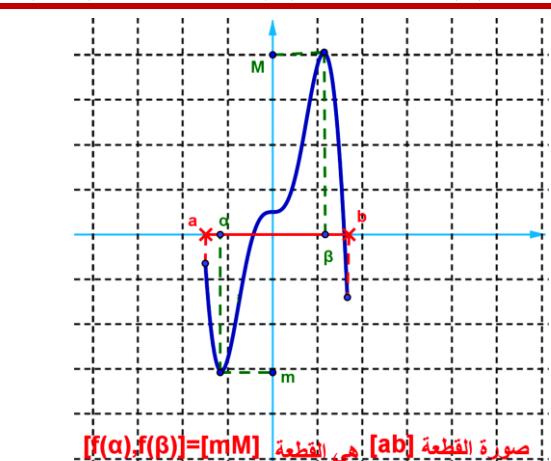
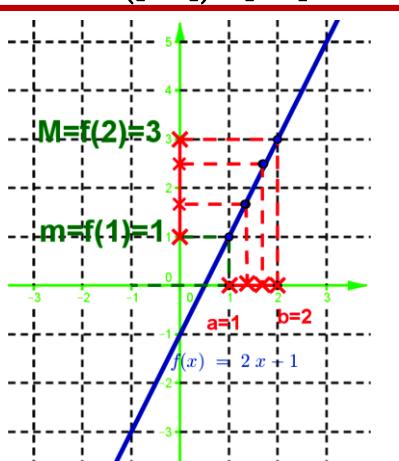
ملاحظة:  $f([a,b]) = [m,M]$

$f([1,2]) = [1,3]$  **مثلا:**  $f(x) = 2x - 1$  **لدينا مبيانا:**

$f([1,2]) = [1,3[$

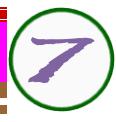
**03. مثال:**  $. M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$  و  $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$

**نضع:**  $\exists (\alpha, \beta) \in I^2 / m = f(\alpha)$  و  $M = f(\beta)$

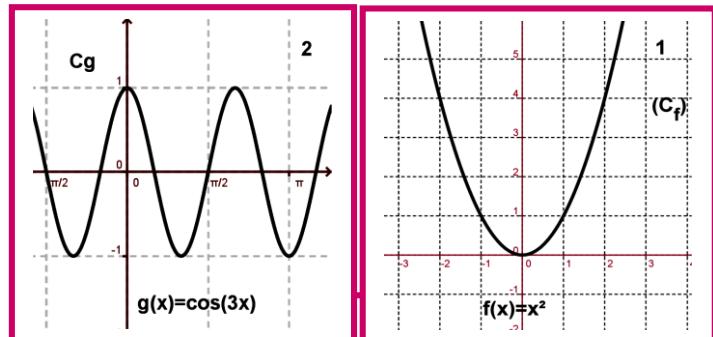


**XI. مبرهنة القيم الوسيطية:** théorème des valeurs intermédiaires

**01. نشاط:**



## تمارين : اتصال دالة عدديّة



نأخذ  $a = 1$  و  $b = -2$  في الرسم 1؛  $a = 0$  و  $b = \pi$  (الرسم 2)  
 استنجد مبيانيا  $f(a)$  و  $f(b)$ . (الرسم 1)

(1)   
 نأخذ عدد  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  هل يوجد على الأقل عنصر  $c$  من  $[a, b]$  حيث  $f(c) = k$  (الرسم 1)  
 أعط الخاصية:

02. خاصية:

دالة متصلة على القطعة  $[a, b]$ .

لكل عدد حقيقي  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  يوجد على الأقل عنصر  $c$  من  $[a, b]$  حيث  $f(c) = k$ .

03. نتائج:

- بما أن: صورة قطعة  $[a, b]$  بدالة متصلة هي القطعة  $[m, M]$  إذن:  $f([a, b]) = [m, M]$
- إذا كان:  $0 \in f([a, b]) = [m, M]$  أي  $f(a) < 0$  و  $f(b) > 0$  (احدهما موجب والآخر سالب) ومنه يوجد عنصر  $c$  من  $[a, b]$  حيث  $f(c) = 0$ .
- نتيجة لـ  $(f(a) \times f(b) < 0)$ : المعادلة  $x \in [a, b] / f(x) = 0$  تقبل على الأقل حل على  $[a, b]$ .

## XII. دالة متصلة ورتيبة قطعا:

01. نشاط: دالة متصلة ورتيبة قطعا. لدينا صور المجالات الآتية

$f$ متصلة وتناقصية قطعا نحدد: المجال $f(I)$	$f$ متصلة وترابطية قطعا نحدد: المجال $f(I)$	المجال $I$	$f$ متصلة وتناقصية قطعا نحدد: المجال $f(I)$	$f$ متصلة وترابطية قطعا نحدد: المجال $f(I)$	المجال $I$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$]a, +\infty[$	$[f(b), f(a)]$	$[f(a), f(b)]$	$[a, b]$
$[f(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a)$	$]-\infty, a]$	$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$	$[a, b[$
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$	$]-\infty, a[$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)$	$]a, b]$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$]-\infty, +\infty[$	$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$	$]a, b[$
			$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[a, +\infty[$

الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة على قطعا على مجال:

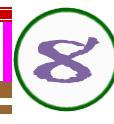
A. تقابل دالة عدديّة – التقابل العكسي لدالة:

01. تعريف:

دالة عدديّة من  $I$  نحو  $J$ . ( $f : I \rightarrow J$ ).

- $f$  تسمى دالة تقابل من  $I$  نحو  $J$  يعني كل عنصر  $x$  من  $I$  له صورة وحيدة  $y$  من  $J$  وكل عنصر  $y$  من  $J$  له سابقاً وحيداً  $x$  من  $I$ .
- الدالة  $g$  من  $J$  نحو  $I$  التي تربط كل عنصر  $y$  من  $J$  بالعنصر الوحيد  $x$  من  $I$  حيث  $g(x) = y$  تسمى الدالة العكسية لـ  $f$ ؛

ويرمز له بـ:  $f^{-1} : J \rightarrow I$  (أي  $g = f^{-1}$ ).



## 02. مثال :

لنعتبر الدالة العددية  $x = f(x)$  هل الدالة تقابل من  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  .

هل كل عنصر  $x$  من مجموعة الانطلاق  $\mathbb{R}$  له صورة وحيدة من مجموعة الوصول  $\mathbb{R}$  .

هل كل عنصر  $y$  من مجموعة الوصول  $\mathbb{R}$  له سابق وحيد من مجموعة الانطلاق  $\mathbb{R}$  .

ماذا نستنتج؟

## 03. ملحوظة:

- الدالة العكسي  $f^{-1}$  تكتب على الشكل التالي :
- $f^{-1} : J \rightarrow I$        $f^{-1} : J \rightarrow I$   
و ذلك باستعمال المتغير  $x$  بدل من  $y$        $x \mapsto f^{-1}(x)$        $y \mapsto f^{-1}(y)$
- العلاقة التي تربط  $f$  و  $f^{-1}$  هي :  

$$\left. \begin{array}{l} x = f(x) \\ x \in I \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{array} \right\}$$
- لكي نبرهن على أن دالة  $f$  معرفة من  $I$  نحو  $J$  ب أنها تقابل من  $I$  إلى  $J$  نبين أن المعادلة  $x \in I : f(x) = y$  لها حل وحيد مع  $y$  من  $J$  .

## 04. مثال :

لنعتبر الدالة العددية  $f(x) = x^2$  على  $[0; +\infty]$

استنتج مبيانا  $J = f(I)$  ( أي صورة المجال  $I$  ب  $f$  ) .

هل لكل عنصر  $y$  من  $J = f(I)$  له سابق وحيد  $c$  من  $I$  . استنتج طبيعة التطبيق  $f$  .

لنعتبر المعادلة :  $y = f(x) = x^2$  مع  $y$  معلوم من  $J$  .

أ أوجد عدد حلول المعادلة  $(E)$  .

ب استنتج الدالة العكسيه  $f^{-1}$  ل  $f$  .

## 05. خاصية :

$f$  دالة عددية متصلة و رتبية قطعا على مجال  $I$  و  $y \in f(I)$

الدالة  $f$  هي تقابل من  $I$  إلى  $f(I)$  .

ليكن  $y$  من  $f(I)$  المعادلة :  $x \in I / f(x) = y$  تقبل حل وحيد على  $I$  .

## 02. نتائج :

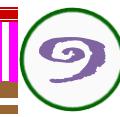
إذا كانت  $f$  دالة متصلة و رتبية قطعا على المجال  $[a,b]$  .

فإنه لكل عدد محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  يوجد عدد وحيد  $c$  من  $[a,b]$  حيث :  $f(c) = k$

إذا كان  $f(a) \times f(b) = 0$  المعادلة  $x \in [a,b] / f(x) = 0$  تقبل حل وحيد .

## 06. ملحوظة:

- الدالة  $f$  معرفة كما يلي :  $f : I \rightarrow J = f(I)$  . الدالة  $f^{-1}$  معرفة كما يلي :  $x \rightarrow f(x) = y$
- $f^{-1} : J = f(I) \rightarrow I$        $y \rightarrow f^{-1}(y) = x$



- $f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ x \in I \\ y \in J \end{cases}$
- $\forall y \in J : f \circ f^{-1}(y) = y . \forall x \in I : f^{-1} \circ f(x) = x$
- ويمكن كتابة  $\forall x \in J : f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall y \in J : f \circ f^{-1}(y) = y$  كذلك على الشكل التالي :

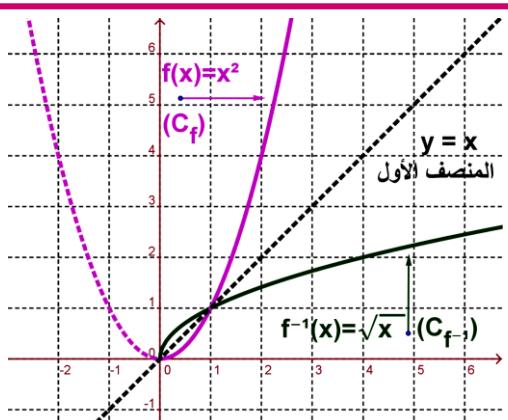
## 07. خاصيات الدالة العكسيّة: (تقبل)

دالة عدديّة متصلة و رتيبة قطعا على مجال  $I$  و  $f^{-1} = f(I) = J$  الدالة العكسيّة ل  $f$ .

1. الدالة  $f^{-1}$  متصلة على المجال  $J = f(I)$ . (تقبل)

2. الدالة  $f^{-1}$  رتيبة قطعا على المجال  $J$  و لها نفس رتابة  $f$  على  $I$ .

3. منحنى الدالة  $f^{-1}$  و  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f$  متماثلان بالنسبة للمستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x$  :  $y = f(x)$  في معلم متعمد



منظم (المستقيم  $(D)$  يسمى المنصف الأول)

07. مثال: لنعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ  $f(x) = x^2$

أ - مبيانيا هل  $f$  متصلة على  $[0; +\infty)$ .

ب - استنتج رتابة  $f$  على  $I$ .

ج - حدد:  $J = f(I)$ .

د - هل  $f$  تقبل دالة عكسيّة معرفة على مجال يجب تحديده.

2 حدد:  $f^{-1} = f(I)$ . (منحنى الدالة  $f$ ) (منحنى الدالة  $f^{-1}$ )

## 08. مفردات:

الدالة العكسيّة  $f^{-1}$  المحصل عليها تسمى كذلك الجذر من الرتبة 2 . و نرمز لها بـ  $\sqrt[n]{x}$  أو ب اختصار :

XIV. دالة الجذر من الرتبة  $n$

## 01. نشاط:

n . لنعتبر الدالة  $f(x) = x^n$  على المجال  $I = [0; +\infty)$

بين أن الدالة  $f$  تقبل دالة عكسيّة  $f^{-1}$  على المجال  $J$  حده.

## 02. مفردات:

الدالة العكسيّة  $f^{-1}$  تسمى الدالة الجذر من الرتبة  $n$  .

الدالة العكسيّة  $f^{-1}$  يرمز لها بـ  $\sqrt[n]{x}$  .

نكتب:  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$  . أو أيضا  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$  .

حالة:  $n = 1$  لدينا  $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{x} = x$  (حالة غير مهمة).

حالة:  $n = 2$  لدينا  $f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$  . (الدالة تسمى باختصار الجذر المربع)



- حالة :  $n = 3$  لدينا  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ . ( الدالة تسمى باختصار الجذر المكعب أو الجذر الثالث ).

## 03.تعريف وخاصية:

- عدد صحيح طبيعي غير منعدم.
- الدالة  $f(x) = x^n$  متصلة و تزايدية قطعا على  $I = [0; +\infty]$ .
- $f^{-1}$  تقابل من  $I$  إلى  $[0, +\infty]$  دالتها العكسية  $f^{-1}$  تسمى الدالة الجذر من الرتبة  $n$  و نرمز لها:  $\sqrt[n]{x}$ .
- نكتب :  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ . أو أيضا :  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ .
- العدد:  $\sqrt[n]{a}$  يسمى الجذر من الرتبة  $n$  للعدد الحقيقي الموجب  $a$ .

## 04.خاصية:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$  .  $\forall x \geq 0$  ;  $(\sqrt[n]{x})^n = x$  و  $\sqrt[n]{x^n} = x$  .  $\sqrt[n]{1} = 1$  ;  $\sqrt[n]{0} = 0$
- منحنى  $(C_f)$  الدالة  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$  هو معانٍ (Cf) منحنى الدالة  $f(x) = x^n$  بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعدد منمنظم ( المنصف الأول هو المستقيم (D) الذي معادته  $y = x$  ).

## 05.نتائج:

- $\forall a \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^+ ; \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^+ ; \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$

## XV. العمليات على الجذور من الرتبة n.

### 01. خصيات:

- $a \geq 0$  و  $b \geq 0$  و  $n$  و  $m$  من  $\mathbb{N}^*$  .  $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \times m]{a \times b}$
- $(b > 0) ; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  و  $(b > 0) ; \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$  و  $\sqrt[n \times m]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a}$

### 02.مثال:

- بسط:  $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}}$
- لدينا :  $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}} = \sqrt[3 \times 5]{81} \times \sqrt[15]{3^{11}}$



$$= \sqrt[15]{3^4 \times 3^{11}}$$

$$= \sqrt[15]{3^{15}} = 3$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}} = 3$$

XVI. بعض خاصيات الدوال التي هي على شكل:  $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$

01. خاصيات  $\oplus$  (تقبل)

f دالة عدديّة موجبة على مجال I. n من  $\mathbb{N}^*$ .

إذا كانت  $f(x)$  متصلة على I فإن  $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$  متصلة على I.

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell} \geq 0$  فإن:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$  فإن:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

تبقى الخصائص صحيحة إذا كان:  $x \rightarrow x_0^-$  ;  $x \rightarrow x_0^+$  ;  $x \rightarrow \pm\infty$

02. تمارين تطبيقي:

لنعّتبر الدالة f المعرفة بـ:  $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$

(1) حدد  $D_f$  مجموعة تعريف f.

(2) أحسب:  $f(-1)$  ;  $f(0)$  ;  $f(15)$

(3) أحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

XVII. القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً:

01. تعريف:

$x \in \mathbb{R}^{+*}$  و  $m \in \mathbb{Z}$  و  $n \in \mathbb{N}^*$  (مع  $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$ )

الكتابة  $\sqrt[n]{x^m}$  نرمز لها بـ:  $x^r$  أو أيضاً:  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$  أما  $x^r$  يسمى القوة الجذرية للعدد x ذات الأُس r.

$$x^r = x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$$

02. أمثلة:

(1) مثل 1: أكتب على شكل  $x^r$  ما يلي:  $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{-32}$  و  $\sqrt[13]{2^{-15}}$  و  $\sqrt[3]{5}$  و  $\sqrt[11]{21}$

(2) مثل 2: أكتب بطريقة أخرى الأعداد التالية:  $\sqrt[3]{8}$ ;  $\sqrt[5]{11}$ ;  $\sqrt[7]{3}$ ;  $\sqrt[4]{3^{-5}}$ ;  $\sqrt[4]{3^5}$

03. ملاحظة:

تعريف الأُس في  $\mathbb{Q}$  هو تمديد لتعريف الأُس في  $\mathbb{Z}$ .

لدينا:  $0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{0} = 0$  بمان:  $\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ :  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^1} = \sqrt[n]{a}$



لتعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة كما يلي :

1. حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .
2. بين أنه يمكن تمديد بالاتصال الدالة  $f$  في 0.
3. أحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

## 04. خصائص القوى الجذرية :

و  $y$  من  $\mathbb{R}^*$  و  $r$  و  $r'$  من  $\mathbb{Q}$ . لدينا :

$$x^r > 0$$

$$x^r = x^{r'} \Leftrightarrow r = r'$$

$$x^r \times y^r = (x \times y)^r \quad \text{و} \quad x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad \text{و} \quad (x^r)^{r'} = x^{r \times r'} \quad \text{و} \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r} \quad \text{و} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$$

مثال: بسط ما يلي.

$$. A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right) \quad (1)$$

$$. B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} \quad (2)$$

جواب :

$$A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right) = (2)^{-\frac{5}{3}} \times (2^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2^3)^{\frac{2}{3}} = (2)^{-\frac{5}{3}} \times (2^{-1}) \times (2^2) = (2)^{-\frac{5}{3}-1+2} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = \frac{7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = \frac{7^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = 7^{1+\frac{1}{4}} = 7^{\frac{5}{4}}$$