تصحيح التمرين الأول

1) أ- لدينا :

$$M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2-2y+z^2-2z=1$$
$$\Leftrightarrow x^2-2(1)x+(1)^2+y^2-2(1)y+(1)^2+z^2-2(1)z+(1)^2=1+(1)^2+(1)^2+(1)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$$
$$\Leftrightarrow (x-(1))^2+(y-(1))^2+(z-(1))^2=(2)^2$$

إذن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها $R=2$

ب-

✓ $d(\Omega,(P))=\dfrac{|(1)-(1)|}{\sqrt{(0)^2+(1)^2+(1)^2}}=0$

✓ بما أن $d(\Omega,(P))<R$ فإن (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C)

ج- بما أن $d(\Omega,(P))=0$ فإن (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) (الدائرة الكبرى)

و منه مركز الدائرة (C) هو النقطة $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها هو 2.

(مركز الدائرة هو المسقط العمودي لمركز الفلكة على المستوى (P) أي في هذه الحالة هو النقطة Ω

و شعاعها $r=\sqrt{R^2-d^2(\Omega,(P))}=\sqrt{2^2-0^2}=2$)

2) أ- لدينا $y-z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) إذن $\vec{u}(0,1,-1)$ هي متجهة منظمية للمستوى (P)

و بما أن $(\Delta)\perp(P)$ فإن $\vec{u}(0,1,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

ب-

✓ لدينا : $\vec{u}(0,1,-1)$ و $\overrightarrow{\Omega A}(0,-3,1)$

إذن $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=2.\vec{i}$

و منه $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|=2$

و لدينا : $\|\vec{u}\| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

و بالتالي : $\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\|$

✓ لدينا : $d\left(\Omega,(\Delta)\right) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|} = \sqrt{2}$

إذن بما أن $d\left(\Omega,(\Delta)\right) < R$ فإن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S) في نقطتين

ج- تمثيل بارمتري للمستقيم (Δ) هو : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

لنحدد مثلوث إحداثيات كل نقطة من نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) و الفلكة (S)

$$M(x,y,z) \in (\Delta) \cap (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \\ z = 2 - t \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2^2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

بعد التعويض نحصل على المعادلة $t^2 - 4t + 3 = 0$

لدينا : $\Delta = 4$

إذن : $t = 3$ أو $t = 1$

✵ $t = 1$: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 1 = -1 \\ z = 2 - 1 = 1 \end{cases}$

✵ $t = 3$: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 3 = 1 \\ z = 2 - 3 = -1 \end{cases}$

تصحيح التمرين الثاني

التجربة " سحب في آن واحد أربع كرات من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\,\Omega = C_{10}^{4} = 210$

(1

✓ A : " من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد كرة خضراء واحدة فقط "

$$V\,\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}$$

لدينا : $cardA = C_2^1 \times C_8^3 = 2\times 56 = 112$

إذن : $p(A) = \dfrac{cardA}{card\,\Omega} = \dfrac{112}{210} = \dfrac{8}{15}$

✓ B : " من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد بالضبط ثلاث كرات من نفس اللون "

$BBB\,\overline{B}$ أو $RRR\,\overline{R}$

لدينا : $cardB = C_3^3 \times C_7^1 + C_5^3 \times C_5^1 = 1\times 7 + 10\times 5 = 57$

إذن : $p(B) = \dfrac{cardB}{card\,\Omega} = \dfrac{57}{210} = \dfrac{19}{70}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الخضراء المسحوبة .

أ- $X = 2 \rightarrow VV\,\overline{V}\,\overline{V}$

$$p(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_8^2}{210} = \frac{1\times 28}{210} = \frac{2}{15}$$

ب-

✓ $X = 0 \rightarrow \overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}$

$$p(X = 0) = \frac{C_8^4}{210} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$$

✓ $X = 1 \rightarrow V\,\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}$

$$p(X = 1) = p(A) = \frac{8}{15}$$

✓ $p(X=2)=\frac{2}{15}$

قانون احتمال X :

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

الأمل الرياضي :

$$E(X)=\left(0\times\frac{1}{3}\right)+\left(1\times\frac{8}{15}\right)+\left(2\times\frac{2}{15}\right)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

تصحيح التمرين الثالث

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+4z+8=0$

لدينا : $\Delta=(4)^2-4(1)(8)=16-32=-16$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين

$$z=\frac{-4+i\sqrt{16}}{2(1)}=\frac{-4+4i}{2}=-2+2i$$ أو

$$z=\frac{-4-i\sqrt{16}}{2(1)}=\frac{-4-4i}{2}=-2-2i$$

إذن : $S=\{-2-2i,-2+2i\}$

2) أ-

$$z'-a=e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}(z-a)$$
$$z'-(-2+2i)=-i\,(z-(-2+2i))$$
$$z'+2-2i=-i\,(z+2-2i)$$
$$z'+2-2i=-iz-2i-2$$
$$z'=-iz-2i-2-2+2i$$
$$z'=-iz-4$$

ب-

✓ لدينا :

$$\begin{aligned}-ic-4&=-i\,(4+8i)-4\\&=-4i+8-4\\&=4-4i\\&=b\end{aligned}$$

إذن : B هي صورة النقطة C بالدوران R

✓ لدينا $R(C)=B$ إذن $\begin{cases}AC=AB\\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

و منه المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A.

3) أ- لدينا Ω منتصف القطعة $[BC]$

إذن : $\omega=\dfrac{b+c}{2}=\dfrac{4-4i+4+8i}{2}=\dfrac{8+4i}{2}=4+2i$

و منه : $|c-\omega|=|(4+8i)-(4+2i)|=|6i|=6$

ب- لنحدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $|z-\omega|=6$

$$|z-\omega|=6\Leftrightarrow \Omega M=6$$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها Ω و شعاعها 6

و لدينا Ω منتصف القطعة $[BC]$ و $|c-\omega|=6$ إذن $\Omega C=\Omega B$

و من الواضح أن $|a-\omega|=|-2+2i-4-2i|=|-6|=6$ إذن $\Omega A=\Omega C=\Omega B$

و بالتالي : مجموعة النقط M هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

تصحيح التمرين الرابع

1) أ-

✓ من أجل $n=0$:

لدينا $u_0=17$

إذن $u_0>16$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$:

نفترض أن $u_n>16$

و نبين أن $u_{n+1}>16$ ؟

حسب الإفتراض لدينا : $u_n>16$

إذن : $\frac{1}{4}u_n>4$

إذن : $\frac{1}{4}u_n+12>4+12$

و منه : $u_{n+1}>16$

✓ نستنتج أن : $u_n>16$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب-

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{4}u_n+12-u_n=\left(\frac{1}{4}-1\right)u_n+12=\frac{-3}{4}u_n+12=\frac{-3}{4}(u_n-16)$

حسب نتيجة السؤال 1) أ- لدينا : $u_n>16$ إذن $u_n-16>0$ إذن $\frac{-3}{4}(u_n-16)<0$

و منه $u_{n+1}-u_n<0$ لكل n من $\mathbb{N}$

وبالتالي (u_n) تناقصية.

✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة فإن (u_n) متقاربة .

2) أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - 16 = \frac{1}{4}u_n + 12 - 16 = \frac{1}{4}u_n - 4 = \frac{1}{4}(u_n - 16) = \frac{1}{4}v_n$

إذن : $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ و حدها الأول : $v_0 = u_0 - 16 = 17 - 16 = 1$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$ إذن : $v_n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ولدينا : $v_n = u_n - 16$ إذن : $u_n = 16 + v_n$

و منه : $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ج-

$$u_n < 16,0001 \quad \Leftrightarrow 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n < 16,0001$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < 0,0001$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) < \ln(0,0001)$$

$$\Leftrightarrow n.\ln\left(\frac{1}{4}\right) < \ln(0,0001)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,0001)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$$

إذن : أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n < 16,0001$ هي : $\boxed{n = 7}$

تصحيح المسألة

.I

1) $g(0)=1-(0+1)^2e^0=1-1\times1=0$

2) مبيانيا :

✓ على المجال $]-\infty,0]$: لدينا (C_g) يوجد فوق محور الأفاصيل إذن : $g(x)\geq 0$

✓ و على المجال $[0,+\infty[$: لدينا (C_g) يوجد تحت محور الأفاصيل إذن : $g(x)\leq 0$

.II

1) أ-

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=x+1-(x^2+1)e^x=x+1-x^2e^x-e^x=x+1-4\times\frac{x^2}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$$

إذن : $f(x)=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x=-\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x+1=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\end{cases}$

ب-

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x=0$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \end{cases}$

✓ بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ فإن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ج- لدينا : $f(x)=x+1-(x^2+1)e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن : $f(x)-(x+1)=-(x^2+1)e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

و منه : $f(x)-(x+1)<0$ لكل x من $\mathbb{R}$

و بالتالي : المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم (D)

2) أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1+\dfrac{1}{x}-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^x\right]=-\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \end{cases}$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^x = -\infty$

إذن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$، فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

3) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x+1-(x^2+1)e^x\right)' \\ &= 1-\left((x^2+1)'e^x+(x^2+1)(e^x)'\right) \\ &= 1-\left(2xe^x+(x^2+1)e^x\right) \\ &= 1-(x^2+2x+1)e^x \\ &= 1-(x+1)^2e^x \\ &= g(x) \end{aligned}$$

إذن : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- لدينا : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

- ✓ على المجال $]-\infty,0]$: $g(x)\geq 0$ إذن $f'(x)\geq 0$ و منه f تزايدية
- ✓ على المجال $[0,+\infty[$: $g(x)\leq 0$ إذن : $f'(x)\leq 0$ و منه f تناقصية

<u>جدول تغيرات الدالة f :</u>

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

ج- الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

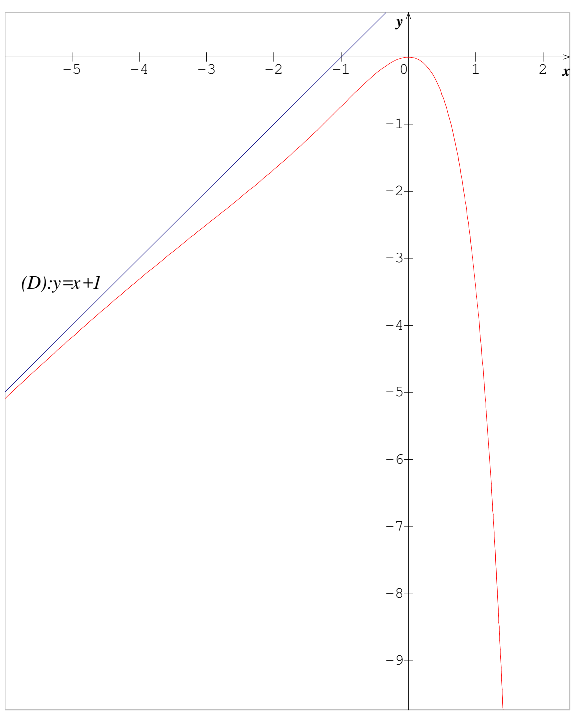
$$\begin{aligned}
f''(x) &= (f')'(x) \\
&= g'(x) \\
&= \left(1-(x+1)^2 e^x\right)' \\
&= 0-\left(\left((x+1)^2\right)' e^x + (x+1)^2 \left(e^x\right)'\right) \\
&= -\left(2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^x\right) \\
&= -(x+1)e^x (2+x+1) \\
&= -(x+1)(x+3)e^x
\end{aligned}$$

لدينا : $e^x > 0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-(x+1)(x+3)$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العددين -3 و -1 فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما -3 و -1

(4



5) أ-

❖

✓ الدالة H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

✓ ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$H'(x)=\left((x-1)e^{x}\right)'=(x-1)'e^{x}+(x-1)\left(e^{x}\right)'=1.e^{x}+(x-1)e^{x}=xe^{x}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $H'(x)=h(x)$

❖ $\int_{-1}^{0}xe^{x}dx=\left[(x-1)e^{x}\right]_{-1}^{0}=(-1)-\left(-2e^{-1}\right)=\frac{2}{e}-1$

ب-

$$\begin{cases} u(x)=x^{2}+1 \\ v'(x)=e^{x} \end{cases} \searrow \begin{cases} u'(x)=2x \\ v(x)=e^{x} \end{cases} \downarrow$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\left(x^{2}+1\right)e^{x}dx &=\left[\left(x^{2}+1\right)e^{x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}2xe^{x}dx\\ &=1-2e^{-1}-2\int_{-1}^{0}xe^{x}dx\\ &=1-\frac{2}{e}-2\left(\frac{2}{e}-1\right)\\ &=1-\frac{2}{e}-\frac{4}{e}+2\\ &=3-\frac{6}{e}\\ &=3\left(1-\frac{2}{e}\right)\end{aligned}$$

ج- مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحنى $\left(C_{f}\right)$ و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته

$x=-1$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} \left| f(x) - (x+1) \right| dx \times \left\| \vec{i} \right\| \times \left\| \vec{j} \right\| \\ &= \int_{-1}^{0} \left((x+1) - f(x) \right) dx \times 2cm \times 2cm \\ &= \int_{-1}^{0} \left(x^2 + 1 \right) e^x dx \times 4cm^2 \\ &= 3\left(1 - \frac{2}{e} \right) \times 4cm^2 \\ &= 12\left(1 - \frac{2}{e} \right) .cm^2 \end{aligned}$$

つづく