

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

التمرين الأول :

1- أ- لتكن : $ax + by + cz + d = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P)

وبما ان : $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P) فان : $a=1$ و $b=0$ و $c=-1$

ومنه معادلة المستوى (P) تصبح : $x - z + d = 0$

وبما ان : المستوى (P) يمر من النقطة $A(0,1,1)$ فان : $0 - 1 + d = 0$ أي ان : $d = 1$

ومنه فان : $x - z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P) .

1- ب- + لنحسب مسافة النقطة $\Omega(0,1,-1)$ عن المستوى (P) : $x - z + 1 = 0$

لدينا : $d(\Omega, (P)) = \frac{|x_\Omega - z_\Omega + 1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ يعني : $d(\Omega, (P)) = \frac{|0 - (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}}$ أي : $d(\Omega, (P)) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

وبما ان شعاع الفلكة (S) هو : $R = \sqrt{2}$ وان : $d(\Omega, (P)) = \sqrt{2}$ أي : $d(\Omega, (P)) = R = \sqrt{2}$

فان : المستوى (P) مماس للفلكة (S) .

+ لنتحقق من ان النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S)

■ لنتحقق من كون $B \in (P)$: $-1 - 0 + 1 = 0$: أي ان : $0 = 0$ اذن : $B \in (P)$

■ لنتحقق من كون $B \in (S)$: لدينا مركز الفلكة (S) هو $\Omega(0,1,-1)$ وشعاعها $R = \sqrt{2}$

أي ان : (S) : $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - (-1))^2 = \sqrt{2}^2 = 2$ أي ان : (S) : $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 2$

ولدينا : $(-1)^2 + (1 - 1)^2 + (0 + 1)^2 = 2$ أي أن : $2 = 2$ اذن : $B \in (S)$

ومنه فان : النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S) .

2- أ- لدينا : المستقيم (Δ) يمر من النقطة $A(0,1,1)$

وبما ان : $(\Delta) \perp (P)$ فان : $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (P)

فان : $\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 0t \\ z = 1 - 1t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

2- ب- ولدينا : $d(\Omega, (\Delta)) = \frac{\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{n}\|}{\|\vec{n}\|} = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = R$ ومنه (Δ) مماس للفلكة (S)

لدينا : (S) : $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 2$ و $C(1,1,0)$

وبما أن : $1^2 + (1 - 1)^2 + (0 + 1)^2 = 2$ أي : $2 = 2$ فان : $C \in (S)$

ولدينا من جهة أخرى : (Δ) : $\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 0t \\ z = 1 - 1t \end{cases}$ أي $\begin{cases} 1 = 0 + 1t \\ 1 = 1 + 0t \\ 0 = 1 - 1t \end{cases}$ أي $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$ ومنه : $C \in (\Delta)$

وبالتالي (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$

3- + حساب $\vec{OC} \wedge \vec{OB}$

$$\vec{OC} \wedge \vec{OB} = 2\vec{k} : \text{اذن } \vec{OC} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} k$$

لدينا : $\vec{OC} \wedge \vec{OB} = 2\vec{k}$

+ حساب مساحة المثلث OCB

$$S_{OCB} = \frac{|\vec{OC} \wedge \vec{OB}|}{2} = \frac{2}{2} = 1 : \text{اذن } S_{OCB} = 1$$

التمرين الثاني :

1. لدينا : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$ و : $p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{4}{56} = \frac{1}{7}$

2. أ. لدينا : $p(X=16) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$

2 ب -

القيم التي يأخذها X : $X(\Omega) = \{0, 4, 8, 16\}$

لدينا : $p(X=0) = 1 - p(\overline{X=0}) = 1 - \frac{C_6^3}{C_8^3} = 1 - \frac{20}{56} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$

و : $p(X=4) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$

و : $p(X=8) = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$

و : $p(X=16) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$ (حسب نتيجة السؤال السابق)

وبالتالي :

$X = x_i$	0	4	8	16
$p(X = x_i)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

التمرين الثالث :

1. أ. لدينا : $(1+i)a = (1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-1 = \sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1) = b$

اذن : $b = (1+i)a$

1. ب. لدينا : $b = (1+i)a$ يعني : $|b| = |(1+i)a| = |1+i| \times |a| = \sqrt{1^2+1^2} \times \sqrt{3^2+1^2} = 2\sqrt{2}$

لدينا : $\arg b = \arg[(1+i)a] = \arg(1+i) + \arg(a)$

■ ولدينا : $1+i = \sqrt{2} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ أي أن : $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

■ و : $a = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2 \cdot (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ أي أن : $\arg(a) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$

وبالتالي : $\arg b = (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})[2\pi] = \frac{5\pi}{12} [2\pi]$

1. ج. لدينا : $b = \sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)$ و : $|b| = 2\sqrt{2}$ يعني : $b = 2\sqrt{2} \cdot (\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}})$

يعني : $b = 2\sqrt{2} \cdot (\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$ وبما أن : $\arg b = \frac{5\pi}{12} [2\pi]$ فان : $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2. أ. لدينا : $ia = i(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}i+i^2 = -1+\sqrt{3}i$ اذن : $c = ia$

$$\left\{ \begin{array}{l} |c| = |a| \\ \arg \frac{c}{a} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right\} \text{ يعني } \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{c}{a} \right| = 1 \\ \frac{c}{a} = 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \end{array} \right. \text{ يعني أن } \frac{c}{a} = i : c = ia \text{ لدينا}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OC \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right\} \text{ إذن } \left\{ \begin{array}{l} |c - o| = |a - o| \\ \arg \frac{c - o}{a - o} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right\} \text{ يعني}$$

2-ب تذكران : ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالازاحة T التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$. يعني : $T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow z' - z = c$

لدينا : $\text{Aff}(\overrightarrow{OC}) = c = ia$: $\overrightarrow{OC}$ هو + لحق المتجهة

+ لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو : $\text{Aff}(\overrightarrow{AB}) = b - a = (1 + i) \cdot a - a = ia$

إذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ أي : $b - a = c$

ومنه فإن : النقطة B هي صورة النقطة A بالازاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$.

2-ج لدينا : B هي صورة النقطة A بالازاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$ يعني : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$

أي أن : $OABC$ متوازي أضلاع

وبما أن : $OA = OC$ وأن : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ (حسب نتيجة السؤال 2أ)

فإن : $OABC$ مربع.

المسألة :

I- 1. لدينا : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$ و : $D_g =]0, +\infty[$ و : $1 \in]0, +\infty[$

يعني : $g(1) = 1^2 + 1 - 2 + 2 \ln 1$ إذن : $g(1) = 0$

2. ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$ ، يعني : $x \in]0, 1]$ أو $x \in [1, +\infty[$

■ إذا كان : $x \in]0, 1]$ لدينا $x \leq 1$ وبما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فإن : $g(x) \leq g(1)$ ومنه فإن : $\forall x \in]0, 1] \quad g(x) \leq 0$

■ إذا كان : $x \in [1, +\infty[$ لدينا $x \geq 1$ وبما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فإن : $g(x) \geq g(1)$ ومنه فإن : $\forall x \in [1, +\infty[\quad g(x) \geq 0$

II- 1. لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + (1 - \frac{2}{x}) \ln x$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{2}{x} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

فإن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ فإن : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C) على يمين 0.

2. أ. لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + (1 - \frac{2}{x}) \ln x$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln x - 2 \frac{\ln x}{x}$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2-ب لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} - 2 \frac{\ln x}{x^2}$

فان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

ولدينا من جهة أخرى : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{2}{x}) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 2 \frac{\ln x}{x}$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$

ومنه فان : المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ بجوار $+\infty$

3-أ. ليكن x عنصراً من المجال $]0, +\infty[$ ، ولدينا : $f(x) = x + (1 - \frac{2}{x}) \ln x$

اذن : $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} \ln x + (1 - \frac{2}{x}) \cdot \frac{1}{x}$ يعني : $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} \ln x + \frac{x-2}{x^2}$

يعني : $f'(x) = \frac{x^2 + x - 2 + 2 \ln x}{x^2}$ اذن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ $\forall x \in]0, +\infty[$

3-ب. لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ $\forall x \in]0, +\infty[$ و : $x^2 > 0$ $\forall x \in]0, +\infty[$

اذن إشارة f' هي نفسها إشارة $g(x)$ لكل $x \in]0, +\infty[$

وحسب نتيجة السؤال (2-أ) :

لدينا : $g(x) \leq 0$ $\forall x \in]0, 1[$ ومنه : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \leq 0$ $\forall x \in]0, 1[$ اذن : f تناقصية على $]0, 1[$

ولدينا : $g(x) \geq 0$ $\forall x \in]1, +\infty[$ ومنه : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \geq 0$ $\forall x \in]1, +\infty[$ اذن : f تزايدية على $]1, +\infty[$

3-ج

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

4-أ. لدينا : $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$ يعني : $\ln x = 0$ أو $1 - \frac{2}{x} = 0$ يعني : $x = 1$ أو $x = 2$

اذن مجموعة حلول المعادلة $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$ على المجال $]0, +\infty[$ هي : $S = \{1, 2\}$

لاحظ ان : $1 \in]0, +\infty[$ وان : $2 \in]0, +\infty[$

4-ب. لدينا : $f(x) = x$ يعني : $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$ يعني : $x = 1$ أو $x = 2$

ومنه المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين هما : $M(1, 1)$ و $N(2, 2)$

4-ج. لدينا : $f(x) - x = (1 - \frac{2}{x}) \ln x = \frac{x-2}{x} \cdot \ln x$ $\forall x \in]0, +\infty[$;

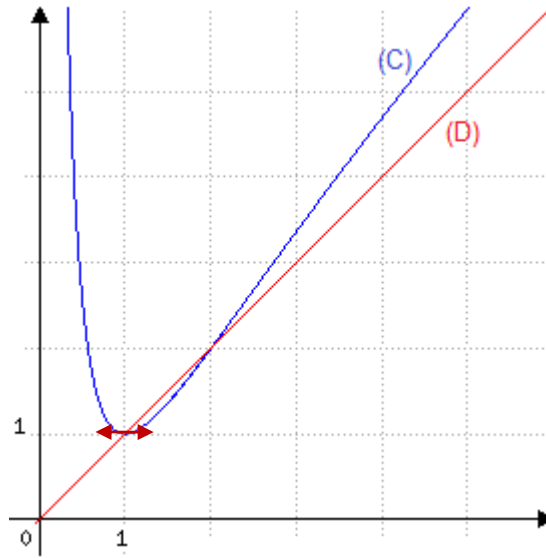
وبما أن : $\ln x \geq 0$ $\forall x \in]1, 2[$ و $x - 2 \leq 0$ $\forall x \in]1, 2[$ و $x \geq 0$ $\forall x \in]1, 2[$

فان : $\frac{x-2}{x} \cdot \ln x \leq 0$ $\forall x \in]1, 2[$ أي ان : $f(x) - x \leq 0$ $\forall x \in]1, 2[$

وبالتالي فان : $f(x) \leq x$ $\forall x \in]1, 2[$

بما أن : $\forall x \in [1,2] \quad f(x) \leq x$ فان المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[1,2]$

5- تمثيل المنحنى (C) والمستقيم (D) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1cm$



أ.6
$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \ln x \cdot dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\ln 2)^2$$

ب.6 لدينا : $H(x) = 2 \ln x - x$ و $h(x) = \frac{2}{x} - 1$

لدينا : H دالة متصلة على المجال $]0, +\infty[$ (لأنها مجموع دوال متصلة على $]0, +\infty[$)

ولدينا : $H'(x) = (2 \ln x - x)' = \frac{2}{x} - 1$ يعني : $H'(x) = h(x)$

اذن : H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0, +\infty[$.

ج.6 لدينا :
$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = \left[(2 \ln x - x) \cdot \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2 \ln x - x}{x} dx = (2 \ln 2 - 2) \cdot \ln 2 - 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx + \left[x \right]_1^2$$

يعني :
$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = 2(\ln 2)^2 - 2 \ln 2 - (\ln 2)^2 + 1 = (\ln 2)^2 - 2 \ln 2 + 1$$

اذن :
$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = (\ln 2 - 1)^2 = (1 - \ln 2)^2$$

د.6 لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين

معادلتاهما $x=1$ و $x=2$.

لدينا :
$$\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x) - x| dx$$

وحسب نتيجة السؤال (II-4-ج) : $\forall x \in [1,2] \quad f(x) \leq x$ أي أن : $\forall x \in [1,2] \quad f(x) - x \leq 0$

أي أن : $\forall x \in [1,2] \quad |f(x) - x| = -(f(x) - x) = \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \cdot \ln x$

ومنه :
$$\mathcal{A} = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2 cm^2$$

III-1. بالنسبة لـ $n=0$ لدينا : $u_0 = \sqrt{3}$ ومنه $1 \leq u_0 \leq 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n=0$)

نفترض أن : $1 \leq u_n \leq 2$ ونبين أن $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

لدينا : $1 \leq u_n \leq 2$ أي أن : $u_n \in [1,2] \subset]1, +\infty[$ وبما أن : f تزايدية على $]1, +\infty[$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

فان : $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$ أي أن : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n+1$)

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq 2$

2- لدينا حسب نتيجة السؤال (II-4-ج) : $\forall x \in [1,2] ; f(x) \leq x$
ولدينا من جهة أخرى : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq 2$ أي أن : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \in [1,2]$
اذن : $\forall n \in \mathbb{N} ; f(u_n) \leq u_n$ يعني : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq u_n$
وبالتالي فإن المتتالية (u_n) تناقصية

3- + لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq 2$ يعني أن المتتالية (u_n) مصغرة بالعدد 1
وبما أن المتتالية (u_n) تناقصية فإنها متقاربة .
+ لدينا f متصلة على المجال $]0,+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[1,2]$
و : $f([1,2]) = [1,2]$ أي أن : $f([1,2]) \subset [1,2]$ وبما أن (u_n) متقاربة و $u_0 \in [1,2]$
فإن النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق : $f(l) = l$
وحسب نتيجة السؤال (II-4-ب) : $l = 1$ أو $l = 2$
وبما أن (u_n) تناقصية فإن : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq u_0$ أي : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq \sqrt{3}$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \sqrt{3}$
وبالتالي فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

Phy.handa@gmail.com

GSM : 0661931283